

# Navier-Stokesov sistem

12. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

## 1 Navier-Stokesov sistem

Obravnavali bomo gibanje nestisljive viskozne tekočine v dveh dimenzijah. Njeno gibanje opisuje znana Navier-Stokesova enačba:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v},$$

pri čemer je  $\rho$  gostota tekočine,  $\mathbf{v}$  hitrostno polje tekočine,  $\mathbf{f}$  zunanje sile,  $p$  tlak in  $\eta$  viskoznost tekočine. Ta enačba ni dovolj za reševanje, saj povezuje tri neznane funkcije:  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ,  $p(\mathbf{r}, t)$  in  $\rho(\mathbf{r}, t)$ . Privzeti moramo še kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

in zapisati enačbo stanja  $p = p(\rho, T)$ . Zadovoljili se bomo z izotermno enačbo stanja:

$$p = p(\rho) \approx p_0 + c_0^2(\rho - \rho_0),$$

pri čemer je  $c_0$  hitrost zvoka v tekočini pri  $\rho_0$  in  $p_0$ . Vstavimo v kontinuitetno enačbo in dobimo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c_0^2 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Gibanje tekočine bomo obravnavali v preseku neskončnega kvadratnega kanala (dolžina stranic  $a$ ), katerega spodnjo stranico bomo vlekli s hitrostjo  $v_0$ . Uvedimo brezdimenzijske spremenljivke:

$$\mathbf{v}/v_0 = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T, \quad \mathbf{r}/a = (x, y)^T, \quad p/(\rho v_0^2) \rightarrow p, \quad \text{Re} = u_0 a \rho / \eta,$$

pri čemer smo vpeljali znano brezdimenzijsko *Reynoldsovo število*,  $\text{Re}$ . Reševanja bi se lahko lotili na klasičen način, kjer bi mrežo diskretizirali in reševali enačbe za tlak in hitrost. Izkaže se, da je takšen način reševanja razmeroma težaven, saj prihaja do nestabilnosti, oscilatornih parazitskih rešitev ipd. Reševanje si olajšamo, če se znebimo tlaka. To storimo z uvedbo nove količine, *vrtinčnosti*:

$$\zeta = -\nabla \times \mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \zeta = -(\nabla \times \mathbf{v})_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Na Navier-Stokesovo enačbo sedaj delujmo z rotorjem:

$$\rho \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \underbrace{\nabla \times (\nabla p)}_0 + \eta \nabla^2 \zeta,$$

v primeru nestisljivega toka ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) pa velja še enačba:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -(\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta,$$

tako da pridemo Stokesovo enačbo za vrtinčnost:

$$\rho \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta \right) = \rho (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \zeta.$$

Ključna pridobitev je, da smo se v enačbi znebili tlaka. V dveh dimenzijah in z uporabo naših brezdimenzijskih spremenljivk tako dobimo enačbo:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Hitrostno polje bomo izračunali iz tokovne funkcije  $\psi$ , ki je skalarna funkcija:

$$\nabla^2 \psi = \zeta \quad \longrightarrow \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Reševanje problema bo torej potekalo po naslednji shemi:

1. Rešimo Poissonovo enačbo in iz  $\zeta(t)$  pridobimo  $\psi(t)$ .
2. Z odvajanjem  $\psi(t)$  izračunamo hitrostno polje,  $u(t)$  in  $v(t)$ .
3. S časovno evolucijo  $\zeta(t)$  izračunamo  $\zeta(t + \Delta t)$ .
4. Ponavljamo korake 1 do 3.

## 1.1 Numerične podrobnosti

### 1.1.1 Začetni pogoji

- ★ Hitrost po vsej votlini postavimo na 0.
- ★ Sledi, da je potencial  $\psi$  konstanten, zato naj bo kar  $\psi = 0$ .
- ★ Upoštevamo robni pogoj hitrosti tekočine ob plošči.
- ★ Izračunamo vrtničnost  $\zeta$  ob  $t = 0$ .
- ★ Izračunamo  $\zeta(\Delta t)$  in nato ponavljamo korake 1 do 3 iz sheme reševanja.

### 1.1.2 Krajevne difference vrtničnosti

V shemi za časovno evolucijo  $\zeta$  uporabljamo simetrične difference. Diferenčna shema se tako glasi:

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} & \left[ (u_{i+1,j} \zeta_{i+1,j} - u_{i-1,j} \zeta_{i-1,j}) + (v_{i,j+1} \zeta_{i,j+1} - v_{i,j-1} \zeta_{i,j-1}) \right] \\ & + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2 \text{Re}} \left[ (\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}) + (\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}) \right], \end{aligned}$$

pri čemer so vse količine na desni strani vzete ob času  $n$ .

### 1.1.3 Robni pogoji

Na vseh stenah imamo robni pogoj  $v_{\perp} = 0$ , za vzporedno komponento pa velja  $v_{\parallel} = v_{\text{stene}}$ . Za tokovno funkcijo  $\psi$  nastavimo homogene Dirichletove robne pogoje, ker pa morajo veljati tudi homogeni Numannovi pogoji, izpeljamo iz njih robne pogoje za vrtničnost:

$$\begin{aligned} \zeta_{i,0} &= \frac{2}{(\Delta x)^2} [\psi_{i,1} - v_{\text{stene}} \Delta x] \\ \zeta_{i,N} &= \frac{2}{(\Delta x)^2} \psi_{i,N-1} \\ \zeta_{0,j} &= \frac{2}{(\Delta x)^2} \psi_{1,j} \\ \zeta_{N,j} &= \frac{2}{(\Delta x)^2} \psi_{N-1,j} \end{aligned}$$

## 1.2 Časovni korak

Pri časovni evoluciji moramo izbrati primeren časovni korak. Običajno se poslužimo Courantovega pogoja:

$$\Delta t \lesssim \frac{0.4 \Delta x}{v_{\max}},$$

pri čemer  $v_{\max}$  označuje največjo hitrost tekočine v posodi ob danem času.

### 1.3 Stacionarno stanje

Stacionarnost bomo preverjali s spreminjanjem vrtinčnosti skozi čas, tako da definiramo parameter stacionarnosti,  $S$ :

$$S^n = \sum_{i,j} \left| \zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j}^{n-1} \right|.$$

### 1.4 Sila na pokrov

Izračunamo lahko tudi silo tekočine na pokrov:

$$F_i = \int_S p_{ik} n_k dS,$$

pri čemer je  $p_{ik}$  tlačni tenzor,  $n_k$  pa normala na površino. Z nekaj analitične manipulacije in uvedbo brezdimenzijske sile,  $f_x = F_x / (\rho v_0 l)$ , pridemo do izraza:

$$f_x = \frac{1}{Re} \int_0^1 \zeta(x, 0) dx.$$

## 2 Implementacija

Poissonovo enačbo sem reševal z 2D FFT, kar je bistveno pohitilo celoten izračun (v primerjavi z uporabo SOR). Če ni drugače omenjeno, je prikazana rešitev izračunana na mreži velikosti  $100 \times 100$ . Časovni korak sem ocenil s Courantovim pogojem, pri čemer sem pri nižjih Reynoldsovih številih časovni korak še bistveno zmanjšal, saj je sicer prišlo do nestabilnosti ( $Re < 200 : \Delta t \rightarrow 0.1 \Delta t$ ,  $Re < 20 : \Delta t \rightarrow 0.05 \Delta t$ ,  $Re < 5 : \Delta t \rightarrow 0.01 \Delta t$ ). Integriranje sile sem opravil s Simpsonovo metodo.

## 3 Rezultati

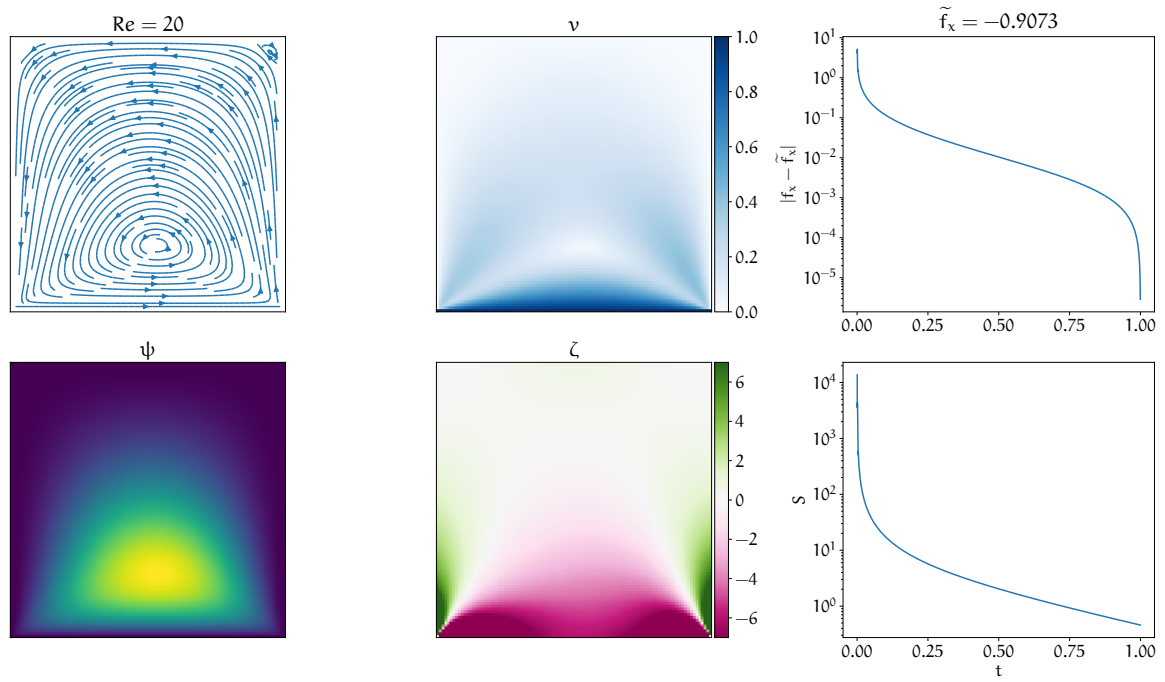
### 3.1 Tokovni profili tekočin

Oglejmo si za začetek nekaj izračunanih tokovnih profilov pri različnih Reynoldsovih številih. Na sliki 1 je prikazan rezultat za nizko Reynoldsovo število (majhna gostota oz. velika viskoznost), na 2 pa za visoko (velika gostota oz. majhna viskoznost). Prikazane so tokovnice, velikost hitrosti  $v$ , hitrostni potencial  $\psi$ , vrtinčnost  $\zeta$  ter sila ( $\tilde{f}_x$  označuje silo pri zadnji iteraciji) in parameter stacionarnosti  $S$ . V sliki tokovnic lahko opazimo prisotnost glavnega, velikega vrtinca, ki se nahaja približno v sredini, medtem ko se na robovih pojavljajo sekundarni, manjši, nasprotno orientirani vrtinci. Hitrost v tekočini je velika ob spodnji plošči, kjer vlečemo, medtem ko je sicer razmeroma majhna. Barvna skala za vrtinčnost je prikazana samo za omejen interval ( $-7 \leq \zeta \leq 7$ ), da bolje vidimo razlike v notranjosti. Ob robovih, predvsem spodnjem, se namreč vrednost vrtinčnosti po absolutni vrednosti močno poveča (tudi do več kot 100). Opazimo, da sila razmeroma hitro konvergira in da je pri večjem  $Re$  manjša. Opazimo lahko, da se je stacionarno stanje pri nizkem  $Re$  vzpostavilo hitreje kot pri višjem  $Re$ .

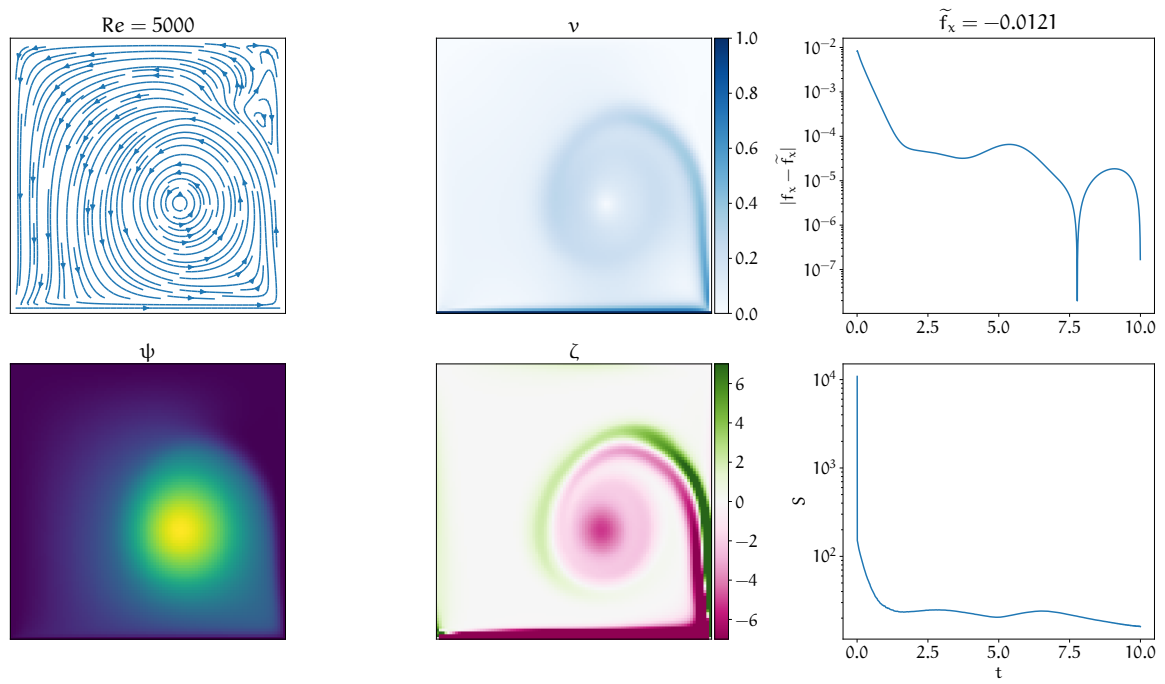
Za trenutek se pomudimo še pri nestabilnem izračunu. Tega sem naredil pri  $Re = 50$ , pri čemer pa nisem upošteval dodatnih popravkov za  $\Delta t$  (izračunal sem ga torej zgolj po zgornji meji Courantovega pogoja). Rezultat je prikazan na sliki 3. Opazimo da začne prihajati do šahovničastega vzorca, parameter stacionarnosti močno naraste, rešitev je nesmiselna.

### 3.2 Ultrastuktura vrtincev

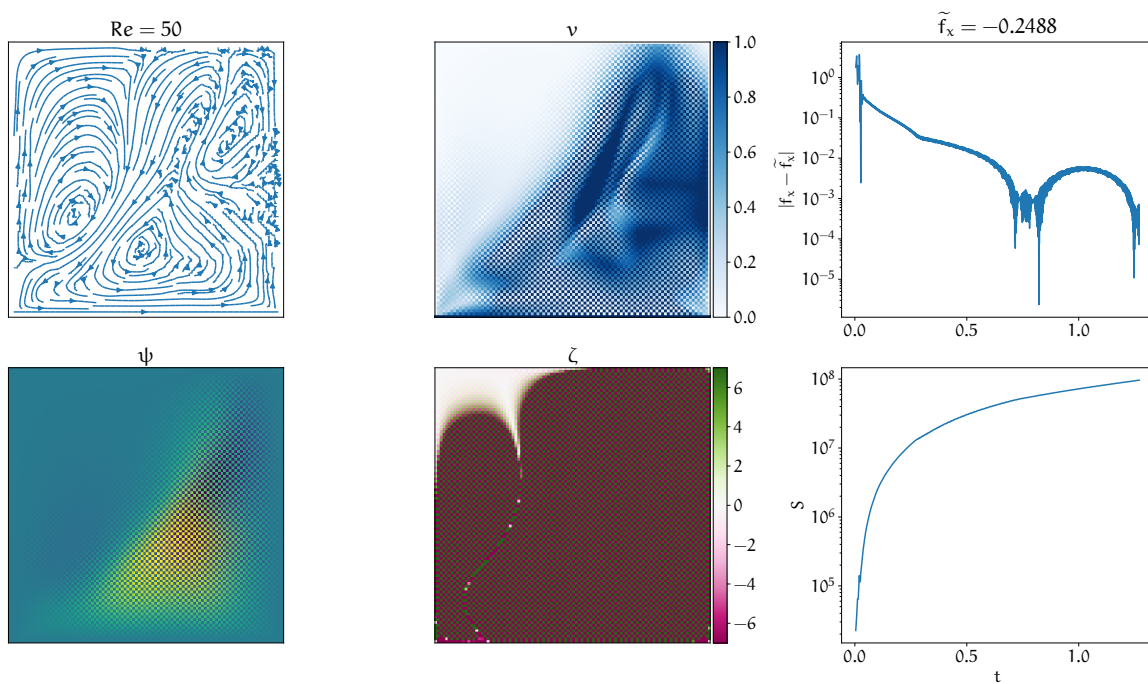
Na sliki 4 so povečano prikazane tokovnice v obeh zgornjih kotih posode. Opazimo, da se z naraščanjem  $Re$  povečuje velikost sekundarnih vrtincev.



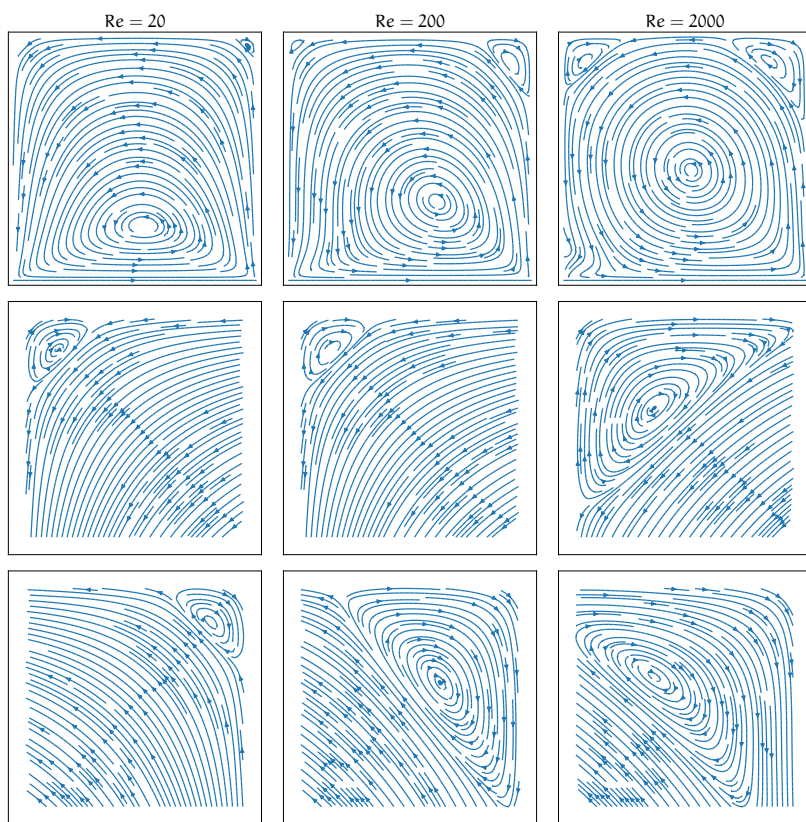
Slika 1: Obnašanje tekočine pri  $Re = 20$ .



Slika 2: Obnašanje tekočine pri  $Re = 5000$ .



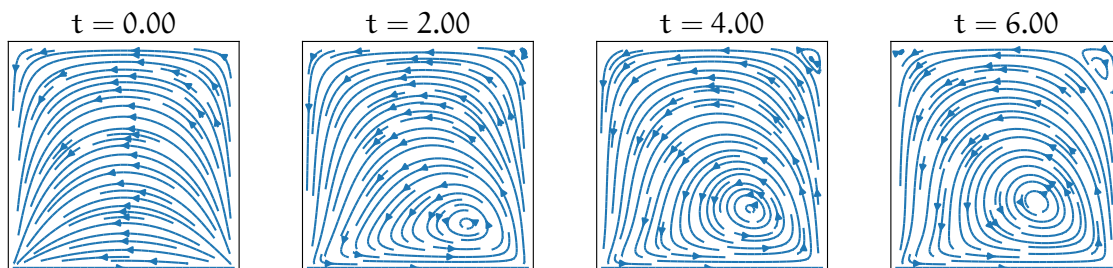
Slika 3: Nestabilna rešitev pri  $Re = 50$  zaradi prevelikega časovnega koraka  $\Delta t$ .



Slika 4: Ultrastruktura tokovnic pri treh različnih Reynoldsovih številih v zgornjih kotih. Z naraščanjem  $Re$  se povečuje velikost sekundarnih vrtincev.

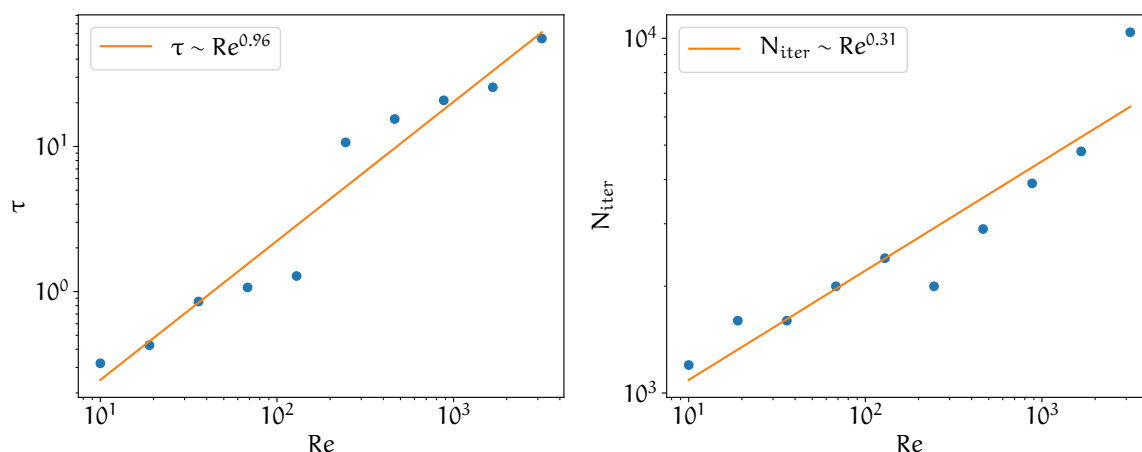
### 3.3 Hitrost vzpostavitve stacionarnega stanja

Oglejmo si sedaj, kako se v posodi vzpostavlja stacionarno stanje. Na sliki 5 je prikazan časovni potek tokovnic pri  $Re = 200$ . Opazimo, da se središče glavnega vrtinca sprva pojavi ob plošči, ki jo vlečemo, nato pa se prične dvigati. Sekundarni vrtinci so sprva majhni, s časom pa se povečajo do končne velikosti. Časovni potek dogajanja je podrobneje prikazan v priloženih animacijah.



Slika 5: Časovni razvoj tokovnic pri  $Re = 200$ .

Na sliki 6 je prikazano, kako hitro se v posodi vzpostavi stacionarno stanje. Časovni razvoj sem ustavil, ko je parameter stacionarnosti padel pod neko mejno vrednost, in sicer  $S < 1$ . Opazimo, da število iteracij potenčno narašča z Reynoldsovim številom.



Slika 6: Čas  $\tau$  in število iteracij  $N_{iter}$ , potrebnih za vzpostavitev stacionarnega stanja,  $S < 1$ .

### 3.4 Odvisnost sile

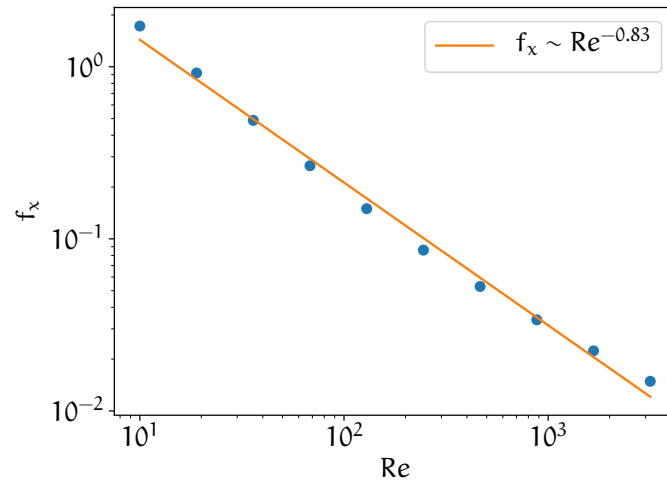
Izračunamo lahko tudi vodoravno komponento sile, ki jo tekočina ustvarja na ploščo. Izkaže se, da bi naj ta padala kot  $f_x \sim 1/Re$ . Na sliki 7 so prikazani rezultati, ki kažejo odvisnost  $f_x \sim Re^{-0.83}$ . Sila je bila izračunana v stacionarnem stanju, torej  $S < 1$ .

### 3.5 Položaj središča vrtinca

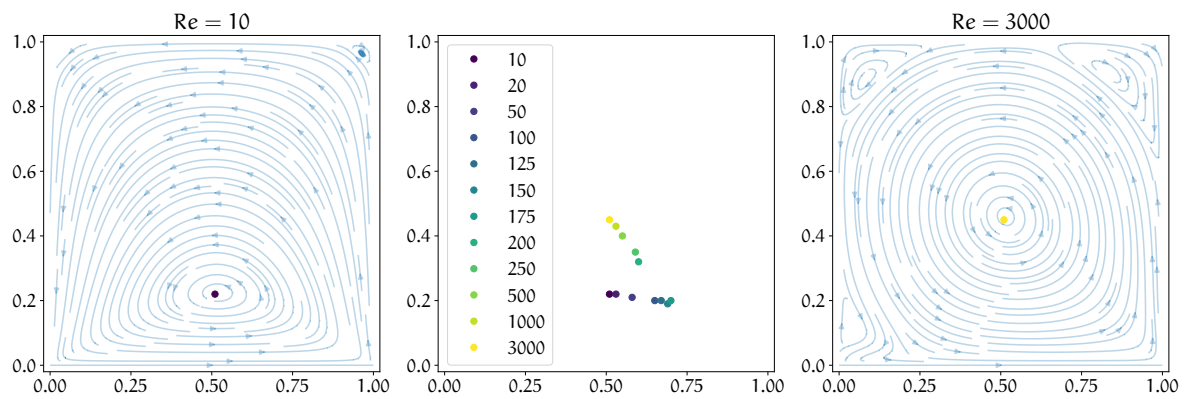
Ogledal sem si tudi, kako se z Reynoldsovim številom spreminja položaj središča glavnega vrtinca. Na sliki 8 je prikazana zanimiva in nenavadna pot: pri nizkih  $Re$  se vrtinec nahaja pri plošči, praktično v sredini, z večanjem  $Re$  se prične pomikati proti desnemu robu, z nadaljnjim večanjem  $Re$  pa se hitro pomakne proti središču kanala.

### 3.6 Premikanje dveh plošč

Za konec se poigrajmo še z nekoliko drugačno konfiguracijo. Enostavna drobna sprememba robnih pogojev nam namreč omogoča, da si ogledamo dogajanje, če vlečemo tako zgornjo kot spodnjo ploščo.

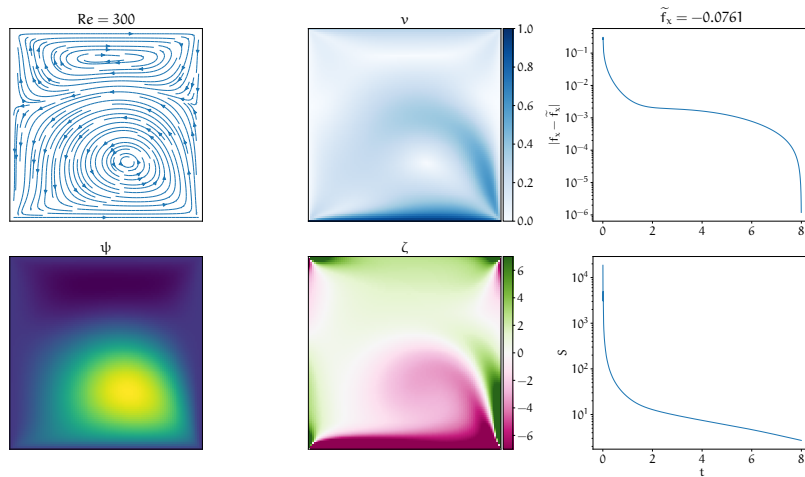


Slika 7: Odvisnost sile

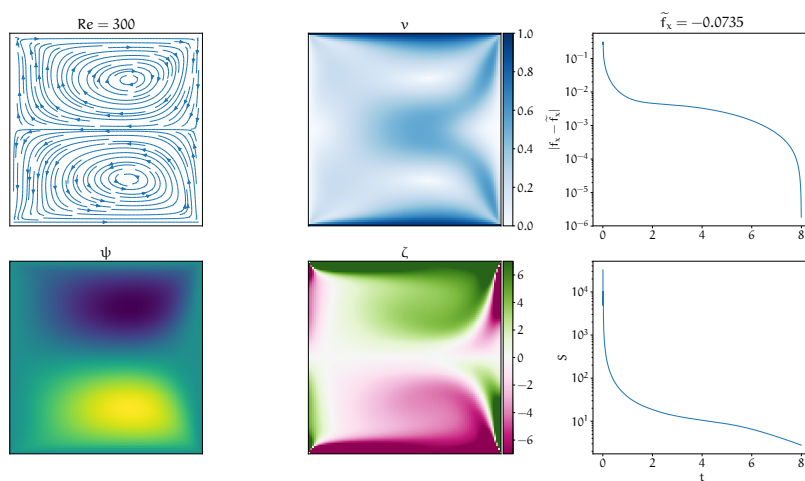


Slika 8: Položaj središča glavnega vrtinca v stacionarnem stanju pri različnih Reynoldsovih številih.

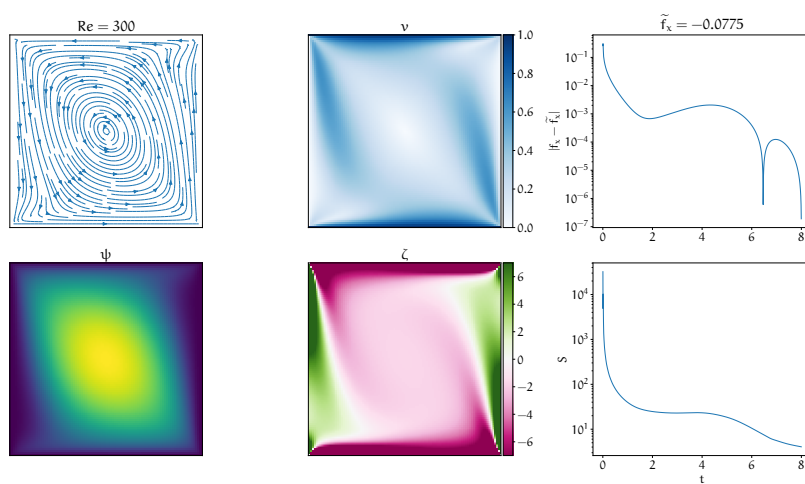
Spodnjo ploščo vlečemo s hitrostjo  $v_0 = 1$ , zgornjo ploščo pa s hitrostjo  $v_2$  pri  $Re = 300$ . Rezultati so prikazani na slikah 9, 10 in 11. Če plošči vlečemo v nasprotni smeri z enakima hitrostma, se vzpostavi en velik, simetričen vrtinec. Če pa plošči vlečemo v isti smeri, se pojavita dva vrtinca, katerih velikost je odvisna od razmerja hitrosti.



Slika 9: Vlek dveh plošč,  $v_2 = -0.3$



Slika 10: Vlek dveh plošč,  $v_2 = -1$



Slika 11: Vlek dveh plošč,  $v_2 = 1$