

Gibanje neraztegljive vrvice

11. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Gibanje neraztegljive vrvice

Obravnavali bomo gibanje neraztegljive vrvice, pritrjene na enem koncu. Enačbi, ki popisujeta njeno gibanje, sta sklopljeni parcialni diferencialni enačbi:

$$\rho_l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial x}{\partial s} \right), \quad (1)$$

$$\rho_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \rho_l g, \quad (2)$$

pri čemer so ρ_l gostota vrvice, $F = F(s)$ sila vzdolž vrvice, parametrizirane s parametrom s , in g težni pospešek. Dodati moramo še pogoj za neraztegljivost:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 = 1.$$

Pojavi se težava, saj nimamo enačbe za silo, poznamo le robne pogoje:

$$x(s=0) = y(s=0) = 0, \quad F(s=1) = 0.$$

Težavo začnemo reševati z uvedbo spremenljivke φ , tako da velja:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin \varphi,$$

s čimer avtomatsko zagotovimo neraztegljivost vrvice. Sedaj enačbi 1 in 2 odvajamo po s ter zamenjamo vrstni red odvodov. Enačbi pomnožimo s $\sin \varphi$ oz. $\cos \varphi$ ter seštejemo oz. odštejemo:

$$\sin \varphi \frac{\partial}{\partial s} (1) - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} (2) : \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \quad (3)$$

$$\cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} (1) + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial s} (2) : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

Na podoben način pridelamo še izraze za robne pogoje:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial s} + \sin \varphi \right) \Big|_{s=0} &= 0, \\ \left(F \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \cos \varphi \right) \Big|_{s=0} &= 0, \\ F \Big|_{s=1} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Big|_{s=1} &= 0. \end{aligned}$$

Četrty robni pogoj, ki velja na koncu vrvice, pove, da je zadnji košček vrvice tog. Izbrali bi lahko tudi drugačen robni pogoj, npr. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Big|_{s=1} = m_u$, ki pomeni, da je na konec vrvice obešena utež z maso m_u . Zgornje enačbe bomo rešili z diskretizacijo po času in prostoru:

$$\begin{aligned} \varphi_i^n &= \varphi(s_i, t_n) & s_i &= i\Delta s, & \Delta s &= 1/N, \\ F_i^n &= F(s_i, t_n) & t_n &= n\Delta t, & \Delta t &\text{poljuben.} \end{aligned}$$

Opravimo najprej z enačbo 3:

$$\varphi_i^{n+1} = 2\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta s}\right)^2 \left[\frac{1}{2} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) (\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n) + F_i^n (\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n) \right].$$

Dobili smo eksplicitno dvokoračno shemo za φ_i^n , ki velja za notranje fragmente vrvice ($i = 1, 2, \dots, N-1$). Prvi korak pustimo kar enak začetnemu: $\varphi_1^1 = \varphi_1^0$. Potrebujemo še enačbi za robne točke. Če bi spet uporabili enostransko diferenčno shemo $\frac{\partial \varphi}{\partial s} \approx (\varphi_1^{n+1} - \varphi_0^{n+1})/\Delta s$, bi naleteli na neugodno transcendentno enačbo, zato uporabimo raje simetrično diferenco $\frac{\partial \varphi}{\partial s} \approx (\varphi_2^{n+1} - \varphi_0^{n+1})/(2\Delta s)$. Pridelamo:

$$\begin{aligned}\varphi_0^{n+1} &= \varphi_2^{n+1} - 2\frac{2\Delta s}{F_0^n} \cos \varphi_1^{n+1}, \\ \varphi_N^{n+1} &= 2\varphi_{N-1}^{n+1} - \varphi_{N-2}^{n+1}.\end{aligned}$$

Opravili smo s časovnim korakanjem, potrebujemo pa še način za izračun $F(s, t)$. Diskretizirajmo enačbo 4:

$$F_{i+1}^n - F_i^n \left[2 + \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2} \right)^2 \right] + F_{i-1}^n = - \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)^2 (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1})^2.$$

Pridelali smo tridiagonalni sistem, dodamu mu še robna pogoja:

$$\begin{aligned}F_0^n &= F_1^n + \Delta s \cdot \sin \varphi_0^n, \\ F_N^n &= 0.\end{aligned}$$

Postopek reševanja je iterativen:

1. Izračunaj $F(s, t)$ iz $\varphi(s, t)$ in $\varphi(s, t - \Delta t)$.
2. Izračunaj $\varphi(s, t + \Delta t)$ iz $\varphi(s, t)$, $\varphi(s, t - \Delta t)$ in $F(s, t)$.
3. Ponavljaj 1. in 2. do zelenega končnega časa.

1.1 Energija vrvice

Iz $\varphi(s)$ moramo najprej izračunati obliko vrvice:

$$\begin{aligned}x_i &= \left(\sum_{n=0}^{i-1} \Delta s \cos \varphi_n \right) + \frac{1}{2} \Delta s \cos \varphi_i, \\ y_i &= \left(\sum_{n=0}^{i-1} \Delta s \sin \varphi_n \right) + \frac{1}{2} \Delta s \sin \varphi_i.\end{aligned}$$

Prav tako potrebujemo translacijsko in kotno hitrost:

$$\begin{aligned}v_i^2 &= \frac{(x_i^n - x_i^{n-1})^2 + (y_i^n - y_i^{n-1})^2}{(\Delta t)^2}, \\ \dot{\varphi}_i^2 &= \frac{(\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1})^2}{(\Delta t)^2}.\end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo celotno energijo i -tega koščka:

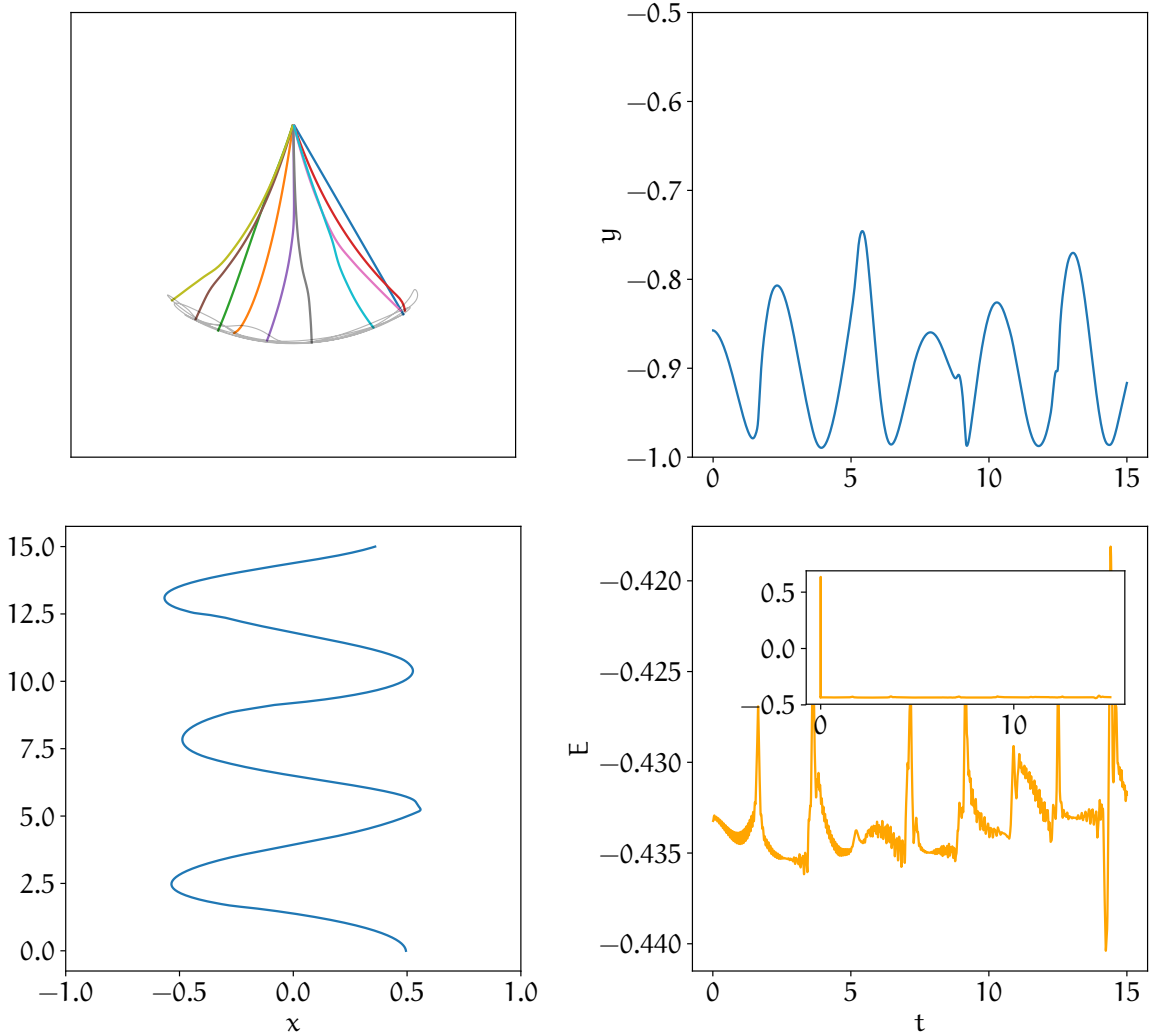
$$E_i = E_i^{\text{trans}} + E_i^{\text{rot}} + E_i^{\text{pot}} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{24} m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i^2 - m_i g y_i,$$

pri čemer sta $m_i = \rho_i \Delta s$ in $l_i = \Delta s$. Celotna energije vrvice je vsota vseh prispevkov:

$$E = \sum_{i=0}^N E_i.$$

2 Rezultati

Oglejmo si za začetek gibanje vrvice, ki jo spustimo z začetnega kota $\varphi_0 = \pi/4$, prikazano na sliki 1. Opazimo, da je gibanje dokaj periodično, predvsem v koordinati x , v koordinati y pa prihaja do različnih amplitud in vmesnih motenj. Konec vrvice potuje po skorajšnjem krožnem loku. Energija v prvih nekaj korakih močno poskoči (prikazano na pomanjšanem grafu), kar je posledica nefizikalnega začetnega pogoja: za popolnoma napeto vrvico v obliki daljice bi namreč potrebovali neskončno veliko silo. K sreči ta nefizikalni začetni pogoj že po nekaj korakih skonvergira in ne povzroča dodatnih težav.

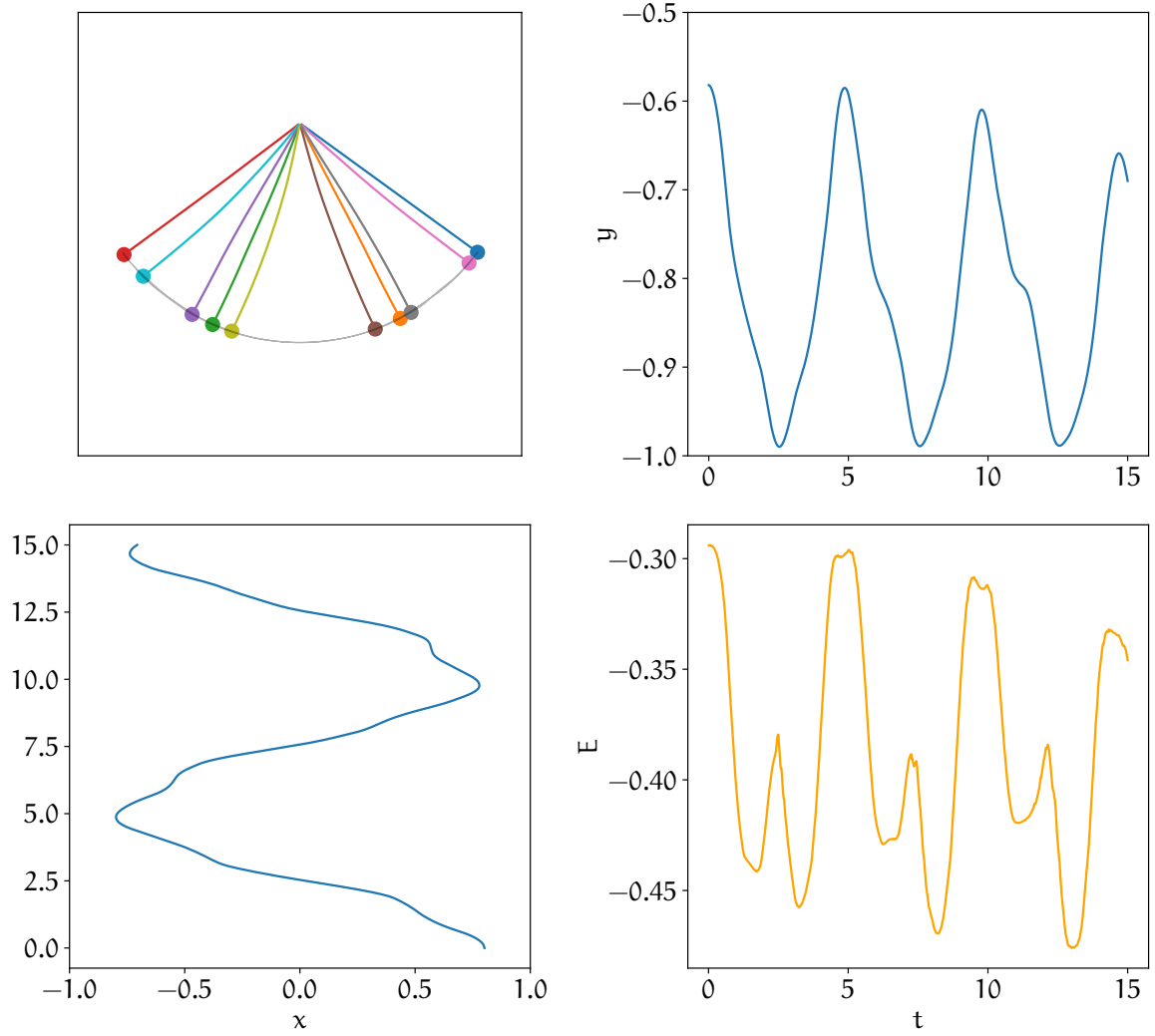


Slika 1: Gibanje vrvice, spuščene s $\varphi_0 = \pi/4$. Prikazanih je nekaj vmesnih oblik vrvice (barvno) in trajektorija konca vrvice (sivo) (levo zgoraj), položaja y (desno zgoraj) in x (levo spodaj) konca vrvice ter celotna energija vrvice (desno spodaj). Število fragmentov, $N = 50$, velikost koraka, $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$.

Na sliki 2 je prikazano gibanje vrvice, ki smo ji na koncu dodali manjšo utež (nehomogeni robni pogoj za $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$). Opazimo, da je gibanje manj kaotično in da konec vrvice opisuje lepši krožni lok. Graf energije je sicer nekoliko nesmiseln, saj bi k energiji vrvice moral prišteti še potencialno in translacijsko kinetično energijo uteži. Gibanje vrvice pri različnih pogojih je prikazano tudi v priloženih video animacijah.

2.1 Vpliv velikosti časovnega koraka

Pri reševanju sklopljenih PDE je zelo pomembna velikost časovnega koraka, Δt , saj lahko prevelik korak vodi v nestabilne rešitve. Na sliki 3 je prikazan vpliv velikosti koraka na obnašanje vrvice. Opazimo, da



Slika 2: Gibanje vrvice, spuščene s $\varphi_0 = \pi/4$, ki ima dodano utež $m_u = 2$. Število fragmentov, $N = 50$, velikost koraka, $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$.

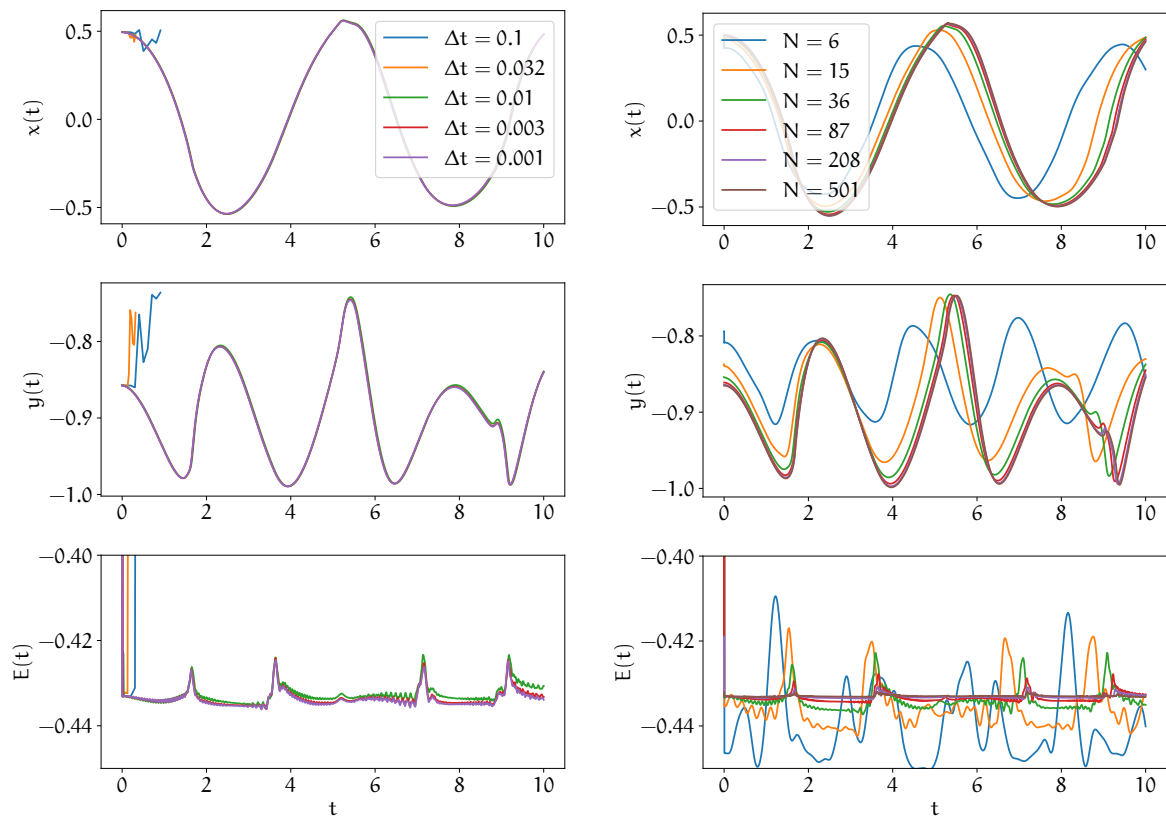
pri $\Delta t \gtrsim 0,01$ rešitev že kmalu po začetku simulacije divergira. Nadaljnje zmanjševanje koraka ne vpliva več bistveno na položaj vrvice, vidimo pa še opazne razlike pri energiji.

2.2 Vpliv števila fragmentov

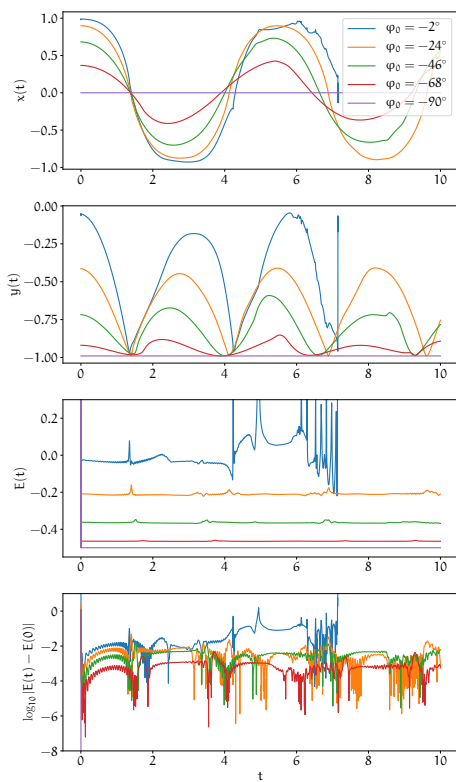
Na sliki 3 je prikazan vpliv števila fragmentov na obnašanje vrvice. Opazimo, da se pri bolj fino diskretizirani vrvi energija bolje ohranja.

2.3 Vpliv začetnega kota

Oglejmo si, kako začetni kot, φ_0 , vpliva na obnašanje vrvice, kar je prikazano na sliki 4. Opazimo, da premajhen začetni kot (vrvica preveč vodoravno) vodi v bolj kaotično obnašanje, ki po nekaj časa zbezlja. Z zmanjševanjem kota se tudi bolje ohranja celotna energija vrvice. Metoda seveda deluje tudi za začetni kot $\varphi_0 = 90^\circ$, kjer vrvica miruje.



Slika 3: Vpliv velikosti časovnega koraka, Δt , (levo) in števila fragmentov, N , (desno) na obnašanje vrvice (levo)



Slika 4: Vpliv začetnega kota, φ_0 , na obnašanje vrvice.