

Direktno reševanje Poissonove enačbe

10. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Direktno reševanje Poissonove enačbe

Ukvarjali se bomo s Poissonovo enačbo na pravokotniku velikosti $a \times b$, ki jo bomo rešili s spektralnimi metodami:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(x, y) &= g(x, y) & (x, y) \in \mathcal{R} \\ u(x, y) &= 0 & (x, y) \in \partial\mathcal{R}\end{aligned}$$

Rešitev $u(x, y)$ in desno stran $g(x, y)$ razvijemo v sinusno vrsto:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \sum_m \sum_n A^{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\ g(x, y) &= \sum_m \sum_n B^{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).\end{aligned}$$

Če dobljene izraze vstavimo v Poissonovo enačbo, dobimo zvezo med koeficienti razvoja:

$$A^{mn} = -\frac{B^{mn}}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}.$$

Izračunati moramo torej samo en komplet koeficientov, iz katerega potem takoj sledi drugi komplet. Če imamo npr. homogene Dirichletove robne pogoje in konstanten $g(x, y) \equiv 1$, sledi:

$$A^{mn} = \frac{4[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{\pi^2 mn \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}.$$

Izkaže se, da ta dvojna vsota konvergira zelo počasi, zato iščemo hitrejša reševanja.

1.1 SOR

Uporabimo lahko metodo pospešene relaksacije, s katero smo se že ukvarjali v prejšnjih nalogah. Izkaže se, da je tudi ta metoda počasna s časovno zahtevnostjo $\mathcal{O}(N^4)$.

1.2 2D FFT/DST

Uporabimo lahko metodo hitre dvodimenzionalne Fourierove transformacije (2D FFT) in rešitev ter nehomogeni del razvijemo po eksponentni funkciji. Ker pa se običajno zanimamo za homogene Dirichletove pogoje, je elegantneje uporabiti kar hitro sinusno transformacijo:

$$\begin{aligned}u_{mn} &= \sum_j \sum_k U^{jk} \sin\left(\frac{m\pi j}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi k}{N}\right), \\ g_{mn} &= \sum_j \sum_k G^{jk} \sin\left(\frac{m\pi j}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi k}{N}\right).\end{aligned}$$

Razvoja ponovno vstavimo v Poissonovo enačbo in dobimo zvezo:

$$U^{jk} = \frac{h^2 G^{jk}}{2 \left(\cos \frac{\pi j}{M} + \cos \frac{\pi k}{N} - 2\right)}.$$

Reševanje torej poteka tako, da na nehomogenem delu, g_{mn} , izvedemo hitro sinusno transformacijo, nato izračunamo koeficiente U_l^m , sledi pa še inverzna hitra sinusna transformacija, s katero pridelamo končno rešitev u_{mn} .

1.3 Kombinirana metoda

Če v eni izmed smeri nimamo homogenih Dirichletovih robnih pogojev, lahko izvedemo kombinirano metodo, pri kateri sinusno transformacijo izvedemo samo v eni smeri:

$$U_l^m = \sum_n u_{ln} \sin\left(\frac{\pi n m}{N}\right),$$

$$G_l^m = \sum_n g_{ln} \sin\left(\frac{\pi n m}{N}\right),$$

nato pa z upoštevanjem diskretizirane Poissonove enačbe pridelamo M tridiagonalnih sistemov za delne transformiranke:

$$U_{l-1}^m - U_l^m \left[4 - 2 \cos \frac{m\pi}{M}\right] + U_{l+1}^m = h^2 G_l^m \quad \forall m.$$

Takšen sistem je rešljiv v $\mathcal{O}(N)$.

1.4 Poves obremenjene opne

V prvem delu se bomo ukvarjali s povesom obremenjene opne, in sicer enakomerno obremenjene ($g(x, y) \equiv 1$) ter neenakomerno obremenjene.

1.5 Prevajanje toplote v valju

V drugem delu bomo obravnavali prevajanje toplote v valju. Ker Laplaceov operator v cilindričnih koordinatah za smer r ne vsebuje samo čistega drugega odvoda ($\frac{\partial^2}{\partial r^2}$), lahko Fourierovo transformacijo naredimo le v smeri z . Na kvadratni mreži ($\Delta z = 2\Delta r$) bomo pridelali tridiagonalni sistem:

$$T_{j+1}^n \left(4 + \frac{2}{j}\right) + T_j^n \left(2 \cos \frac{\pi n}{N} - 10\right) + T_{j-1}^n \left(4 - \frac{2}{j}\right) = 0.$$

2 Implementacija

Reševanja naloge sem se lotil v Pythonu z uporabo knjižnic `numpy` in `scipy`, čeprav bi verjetno bilo primerneje metode implementirati v drugem programskem jeziku (npr. Matlab), kjer bi lahko njihovo časovno zahtevnost bolj smiselno primerjali.

3 Rezultati

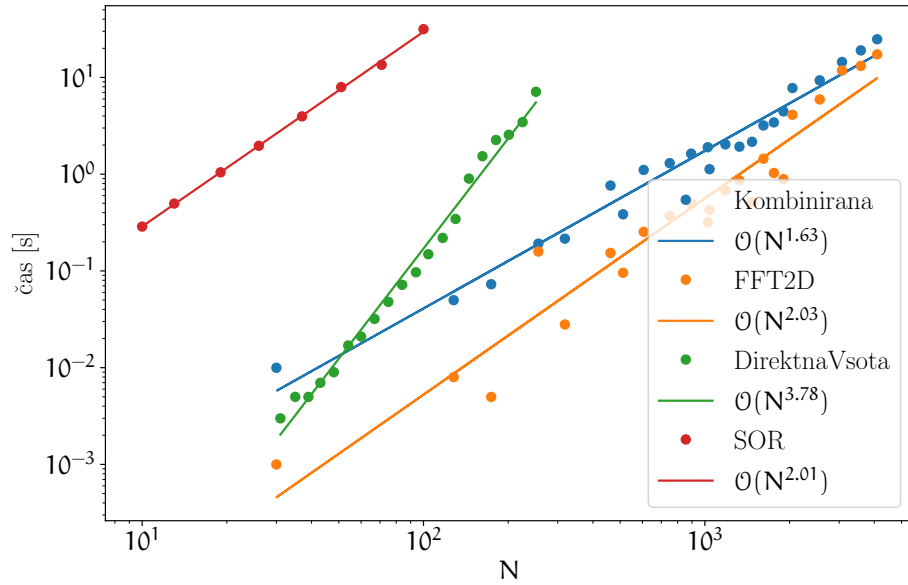
3.1 Poves opne

Oglejmo si za začetek računski čas, ki ga potrebujejo različne metode za reševanje povesa enakomerno obremenjene opne. Rezultati so prikazani na sliki 1. Opazimo, da ima najboljše časovno odvisnost kombinirana metoda, najslabšo pa direktna vsota. Pri metodi SOR sem vzel fiksno število iteracij, čeprav bi za želeno natančnost morale število zahtevanih iteracij naraščati z večjim N . To pomeni, da ima SOR v resnici še slabšo časovno odvisnost od izračunane $\mathcal{O}(N^2)$.

Na sliki 2 je prikazana konvergenca različnih metod. Pri tem sem spremljal vrednost povesa v središču kvadrata ($(x, y) = (1/2, 1/2)$). Opazimo, da kombinirana metoda konvergira hitreje kot FFT2D.

Oglejmo si sedaj, kako je videti poves za nehomogeno opno. Na sliki 3 je prikazana opna z gostoto $\rho_0 = 1$, kjer ima majhen kosček drugačno gostoto ρ (10-krat večjo ali 10-krat manjšo). Pri tem je celotna masa opne normirana. Če je kosček težji, se pričakovano opna na tistem mestu povesi bolj kot homogena opna. Če je kosček lažji, se središče povesa pomakne nekoliko proč od njega.

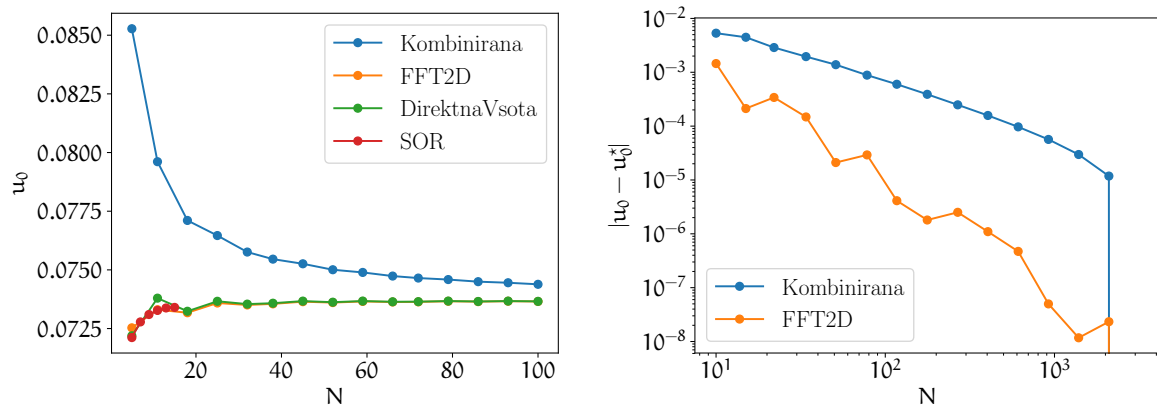
Na sliki 4 je prikazan poves za nehomogenost v obliki črke Q, na sliki 5 pa konvergenca povesa v središču opne. Zadnja izračunana vrednost (pri $N = 1000$) je bila $u_0^* = -0,07374$.



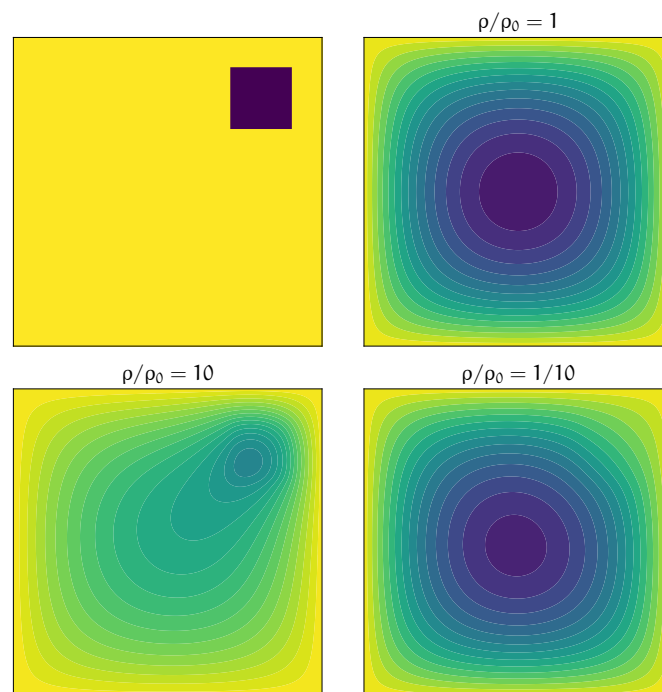
Slika 1: Računski čas različnih metod za reševanje povesa enakomerno obremenjene opne. Pri SOR je število iteracij konstantno ($N_{\text{iter}} = 100$).

3.2 Prevajanje toplote

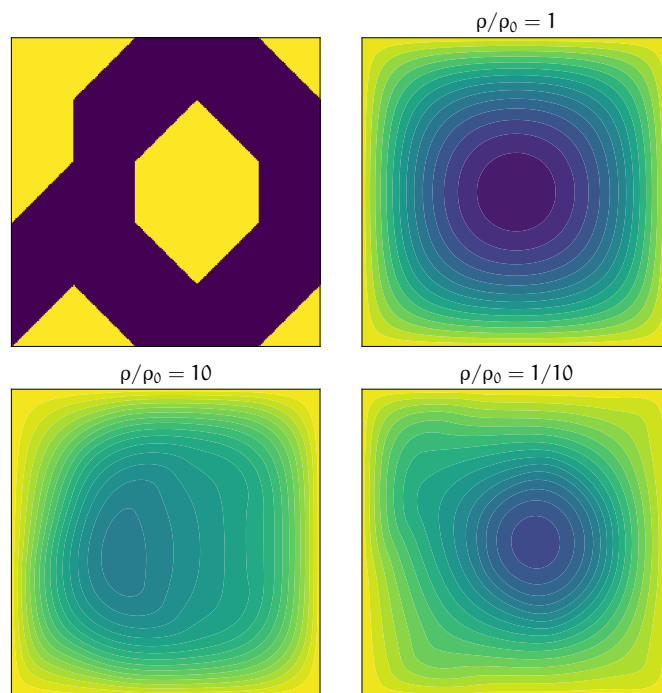
Oglejmo si še prevajanje toplote v valju. Homogene robne pogoje sem postavil na osnovni ploskvi ($T_1 = 0$), nehomogenega pa na plašč valja ($T_1 = 1$). Temperaturni profil je prikazan na sliki 6.



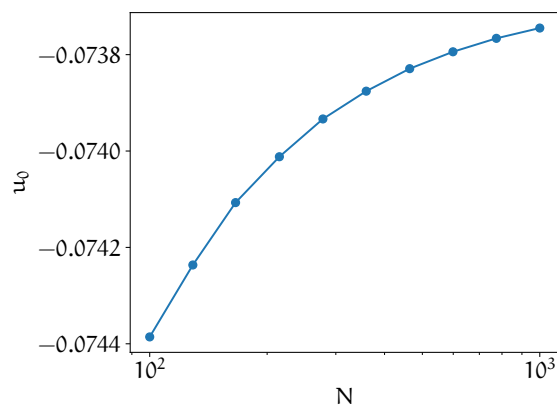
Slika 2: Konvergenca povesa v središču kvadrata pri različnih metodah (levo) in zmanjševanje absolutne napake pri kombinirani metodi in 2D FFT (desno).



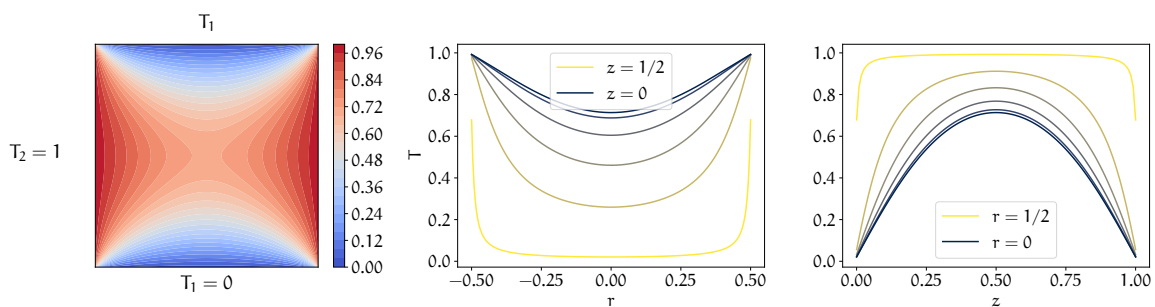
Slika 3: Poves opne z majhno nehomogenostjo gostote ρ . Celotna masa je normirana, barvna skala je na vseh slikah identična.



Slika 4: Poves opne z nehomogenostjo v obliki črke Q.



Slika 5: Konvergenca povesa v središču opne z nehomogenostjo v obliki črke Q.



Slika 6: Temperaturni profil v valju pri različnih temperaturah osnovnih ploskev in plašča, izračunan s kombinirano metodo pri $N = 120$.