

Metoda robnih elementov

9. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Metoda robnih elementov

Ukvarjamo se s parcialnimi diferencialnimi enačbami na netrivialnih domenah, ki jih je zahtevno diskretizirati, a je enostavno zapisati robne pogoje na robu domene. Ključna ideja metode robnih elementov (BEM, *boundary element method*) je torej, da s poznavanjem funkcije samo na njenem robu izračunamo funkcijo na celotni domeni. Obravnavali bomo z dvodimenzionalno Laplaceovo enačbo v kartezičnih koordinatah:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

in sicer na domeni $\mathcal{R}$, omejeni z odsekoma gladko (skenjeno) krivuljo $\mathcal{C}$. Na vsakem segmentu $\mathcal{C}_i$ imamo Dirichletove ali Neumannove robne pogoje:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= f_i(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_i, \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}} &= f_j(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_j. \end{aligned}$$

Normalni odvod $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$ je definiran s komponentama enotskega vektorja normale $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y)^T$, ki kaže ven iz območja $\mathcal{R}$, torej $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \mathbf{n}_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$. Fizikalni primer je prevajanje toplote, pri katerem določena območja robu držimo pri konstantni temperaturi (Dirichletov pogoj), skozi druge pa teče konstantni toplotni tok (Neumannov pogoj), tako da iskana funkcija $\phi(x, y)$ nato opisuje temperaturo znotraj območja. Zapišimo sedaj Greenovo funkcijo za Laplaceov operator v dveh dimenzijah, pri čemer izhodišče premaknemo iz $(0, 0)$ v (ξ, η) in izberemo fizikalno motivirani konstanti $(1/4\pi \text{ in } 0)$:

$$\Phi(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \log [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2].$$

Funkcija Φ divergira v točki (ξ, η) . Z uporabo Gaussovega izreka in nekaj kompleksnoanalitičnega gnetenja lahko povežemo dve poljubni rešitvi Laplaceove enačbe v eno zvezo:

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) = \int_{\mathcal{C}} \left[\phi(x, y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(x, y, \xi, \eta) - \Phi(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \phi(x, y) \right] ds,$$

pri čemer je $\phi(x, y)$ rešitev, ki jo iščemo, $\Phi(x, y, \xi, \eta)$ pa Greenova funkcija. Parameter λ je odvisen od položaja na domeni, in sicer:

$$\lambda(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & ; (\xi, \eta) \notin \mathcal{R} \cup \mathcal{C}, \\ 1/2 & ; (\xi, \eta) \text{ na glatkem delu } \mathcal{C}, \\ 1 & ; (\xi, \eta) \in \mathcal{R}. \end{cases}$$

Omejujočo krivuljo $\mathcal{C}$ aproksimiramo z N -kotnikom in predpostavimo, da sta vrednost funkcije $v^{(n)}$ in njen odvod $d^{(n)}$ na daljici $\mathcal{C}^{(n)}$, izvrednotena v njenem razpolovišču, konstantna:

$$\phi(x, y) \approx v^{(n)}, \quad \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial \mathbf{n}} \approx d^{(n)}, \quad (x, y) \in \mathcal{C}^{(n)}.$$

Integralska enačba se sedaj zapiše z vsoto kot:

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) \approx \sum_{n=1}^N \left[v^{(n)} D^{(n)}(\xi, \eta) - d^{(n)} V^{(n)}(\xi, \eta) \right],$$

pri čemer sta:

$$\begin{aligned} V^{(n)}(\xi, \eta) &= \int_{\mathcal{C}^{(n)}} \Phi(x, y, \xi, \eta) ds(x, y), \\ D^{(n)}(\xi, \eta) &= \int_{\mathcal{C}^{(n)}} \frac{\partial}{\partial n} \Phi(x, y, \xi, \eta) ds(x, y). \end{aligned}$$

Na neki robni daljici $\mathbf{n}$ lahko robni pogoj torej podaja ali vrednost $v^{(n)}$ ali odvod $d^{(n)}$ (vendar ne oba), torej imamo N neznank. Izberemo si, da točka (ξ, η) leži na razpolovišču daljice $\mathcal{C}^{(n)}$. Ker razpolovišče leži na gladkem delu krivulje $\mathcal{C}$, je tam $\lambda = 1/2$. Pridelamo torej sistem N linearnih enačb:

$$\frac{1}{2}v^{(m)} = \sum_{n=1}^N \left[v^{(n)} D^{(n)}(x^{*(m)}, y^{*(m)}) - d^{(n)} V^{(n)}(x^{*(m)}, y^{*(m)}) \right],$$

pri čemer smo z $(x^{*(m)}, y^{*(m)})$ označili razpolovišče daljice $\mathcal{C}^{(m)}$. Ko rešimo sistem enačb, s tem pridemo še N komplementarnih robnih pogojev. Končno lahko zapišemo rešitev v notranjosti $\mathcal{R}$ (kjer je $\lambda = 1$):

$$\phi(\xi, \eta) \approx \sum_{n=1}^N \left[v^{(n)} D^{(n)}(\xi, \eta) - d^{(n)} V^{(n)}(\xi, \eta) \right], \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{R}.$$

Pri implementaciji moramo parametrizirati še integrala po robu daljice $\mathcal{C}^{(n)}$.

Omeniti velja, da metoda robnih elementov torej v glavnem zahteva reševanje *manjše*, a *nesimetrične* in *polne* matrike, rešitev v notranjosti pa je takorekoč točna in zvezna. Metoda je manj primerna za nelinearne probleme.

1.1 Električni potencial elektrode

V prvem delu naloge bomo iskali električni potencial elektrode s konstantnim potencialom. Rešujemo torej Laplaceovo enačbo $\nabla^2 U(x, y) = 0$ z robnim pogojem $U(x, y)|_{\mathcal{C}} = U_0$. Elektrodo razdelimo na daljice dolžine l s konstantno gostoto naboja σ , vsaka daljica pa k celotnemu potencialu v prostoru prispeva svoj delež:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= G_0(\mathbf{0}, (x, y)) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \log[(x - \xi)^2 + y^2] d\xi, \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-l + y \left(\arctan \frac{x_-}{y} - \arctan \frac{x_+}{y} \right) + \frac{x_-}{2} \log(x_-^2 + y^2) - \frac{x_+}{2} \log(x_+^2 + y^2) \right], \end{aligned}$$

pri čemer smo daljico položili na os x v izhodišče in uvedli oznako $x_{\pm} = \mp l/2$. Da dobimo prispevek daljice i z razpoloviščem v (x_i^*, y_i^*) k potencialu v točki $\mathbf{r} = (x, y)$, moramo izvesti ustrezni zasuk koordinatnega sistema za kot, ki ustreza kotu zasuka daljice glede na laboratorijski sistem (označimo z φ_i in pripadajočo rotacijsko matriko $\mathbf{R}_{\varphi_i}$):

$$U_i(x, y) = G_{\varphi_i}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) = G_0^{(i)}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{\varphi_i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)).$$

Pri tem moramo upoštevati še gostoto naboja na daljici, σ_i . Celoten potencial v točki $\mathbf{r}$ je torej vsota prispevkov vseh daljic:

$$U(x, y) = \sum_i \sigma_i U_i(x, y).$$

Površinskih gostot elektrode pa seveda ne poznamo, saj so ravno manjkajoči (Neumannovi) robni pogoji! Poiskati jih moramo torej tako, da upoštevamo robni pogoj (konstantni potencial) in rešimo matrično enačbo:

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b},$$

pri čemer smo v matriko $\mathbf{G}$ zložili vse parne prispevke potencialov (G_{ij} je prispevek i -te daljice k j -ti daljici), vektor $\mathbf{b}$ pa je konstantni vektor z vrednostmi potenciala na elektrodi U_0 .

Izračunamo lahko tudi kapacitivnost elektrode kot:

$$c = \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i l_i.$$

1.2 Obtekanje idealne tekočine

V drugem delu bomo iskali hitrostni profil idealne tekočine okoli ovire, pri čemer ponovno rešujemo Laplaceovo enačbo (oziroma natančneje homogeni del Poissonove enačbe) za hitrostni potencial $u(x, y)$. Njegov gradient nato predstavlja hitrost tekočine:

$$\nabla u(x, y) = (v_x, v_y).$$

Robni pogoj, ki mora veljati, je ničelnost normalne komponente hitrosti tekočine na meji telesa: tekočina namreč ne more teči v telo ali iz njega. Implementacija obtekanja je nekoliko zapletenejša, saj moramo pozorno upoštevati pravilne rotacije koordinatnih sistemov ter izračun tangencialnih ($v_{||}$) in normalnih ($v_{\perp}$) komponent hitrosti tekočine. Neznane količine σ_i tokrat predstavljajo gostoto izvirov tekočine iz daljic, s katerimi se kompenzira zunanji tok. Rešujemo torej matrični sistem:

$$V^{\perp} \sigma = -v_{\perp}^{\infty},$$

pri čemer smo v matriko $V^{\perp}$ ponovno zložili medsebojne prispevke daljic k normalnim komponentam hitrostnega toka, vektor $v_{\perp}^{\infty}$ pa tokrat ni konstanten, saj predstavlja normalno komponento hitrosti pritekajoče tekočine glede na vsako daljico. Greenova funkcija je enaka kot pri elektrostatiki, iz nje pa moramo izračunati še obe komponenti gradienta:

$$v_{||} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \log \frac{x_-^2 + y^2}{x_+^2 + y^2},$$

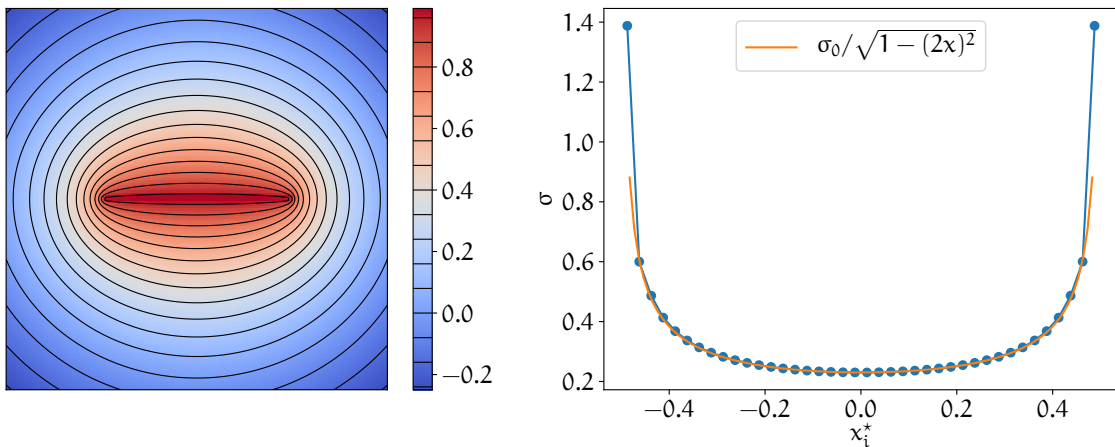
$$v_{\perp} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan \frac{x_-}{y} - \arctan \frac{x_+}{y} \right].$$

Pri lastnem prispevku upoštevamo limiti $\lim_{x, y \rightarrow 0} v_{\perp} = -1/2$ in $\lim_{x, y \rightarrow 0} v_{||} = 0$.

2 Rezultati

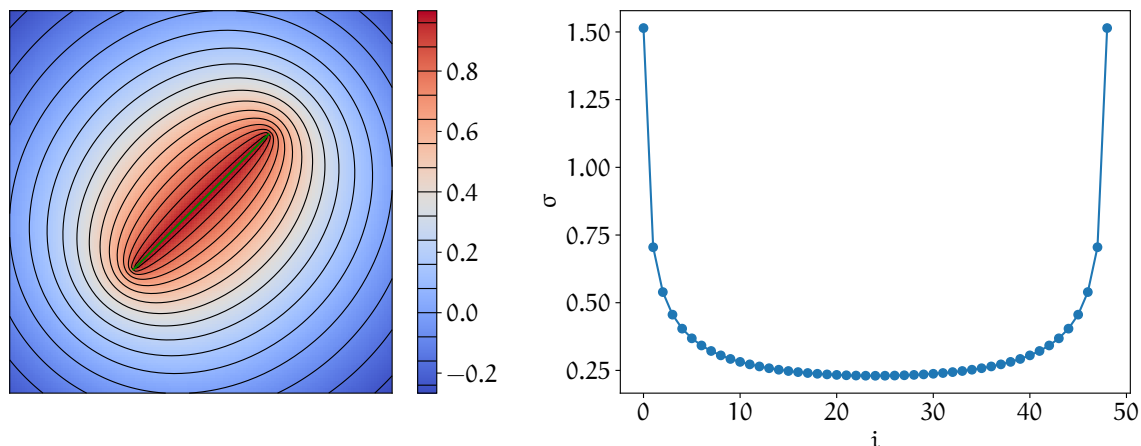
2.1 Elektrostatika

Oglejmo si potencial v okolici elektrode, ki ima obliko traku (v preseku je torej daljica). Rezultat je prikazan na sliki 1. Z rezultatom smo zadovoljni: opazimo, da je na mestu elektrode zares konstanten potencial $U_0 = 1$, z oddaljevanjem od elektrode pa postaja potencial vedno bolj podoben potencialu monopola. Da metoda zares deluje in smo pravilno implementirali rotacijske matrike, se prepričajmo še s sliko 2 – glede na rotacijsko simetrijo problema dobimo torej enak rezultat, le zavrten.



Slika 1: Potencial elektrode v obliki traku in ekvipotencialne krivulje (levo) ter površinska gostota naboja na vsaki daljici z razpoloviščem v x_i^* s prilegano analitično funkcijo (desno).

Zdi se, da je elektroda v obliki traku problem, ki bi se ga moralo dati (enostavno) rešiti tudi analitično. Izračunali bi torej radi potencial in razporeditev naboja na elektrodi. V ta namen se poslužimo



Slika 2: Potencial elektrode v obliki traku, zavrtenema za $\pi/4$ ter pripadajoče površinske gostote naboja.

metode reševanja parcialnih diferencialnih enačb s *konformnimi preslikavami*. Če je neka kompleksna funkcija namreč rešitev Laplaceove enačbe (je torej *harmonična*), bo ostala harmonična tudi po konformni preslikavi. To pomeni, da lahko rešitev Laplaceove enačbe v neznani geometriji poiščemo tako, da rešitev iz znane geometrije konformno preslikamo v željeno geometrijo. Orišimo na kratko potek rešitve za elektrodo v obliki traku:

- ★ Elektrodo postavimo v koordinatni sistem $w = x + iy$, zanima nas potencial $u(x, y)$.
- ★ Poznamo rešitev za krožno elektrodo v koordinatnem sistemu $z = u + iv$, in sicer

$$\psi(u, v) = \psi(r) = A - B \log r.$$

- ★ Poiščemo konformno preslikavo, ki daljico preslika v krog:

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right),$$

$$z = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad x = \cos \varphi, y = 0.$$

- ★ Gostoto naboja izračunamo kot

$$\sigma_z = \sigma_w \cdot |f'(z)|,$$

pri čemer $f(z)$ slika $z \mapsto w$.

- ★ Z nekaj algebrskega gnetenja pridelamo analitični izraz za porazdelitev naboja:

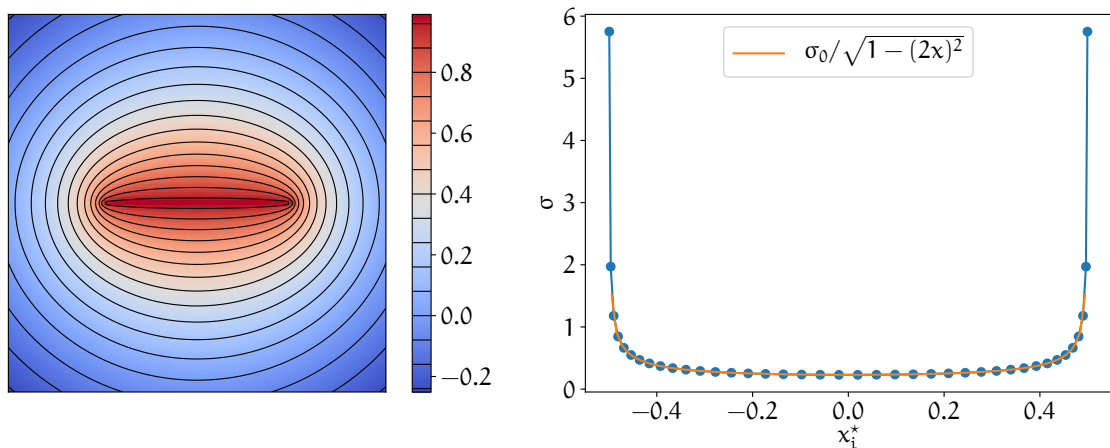
$$\sigma = \frac{A}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2}},$$

pri čemer je d dolžina elektrode, A pa numerični prefaktor, ki je odvisen od izbire konstant.

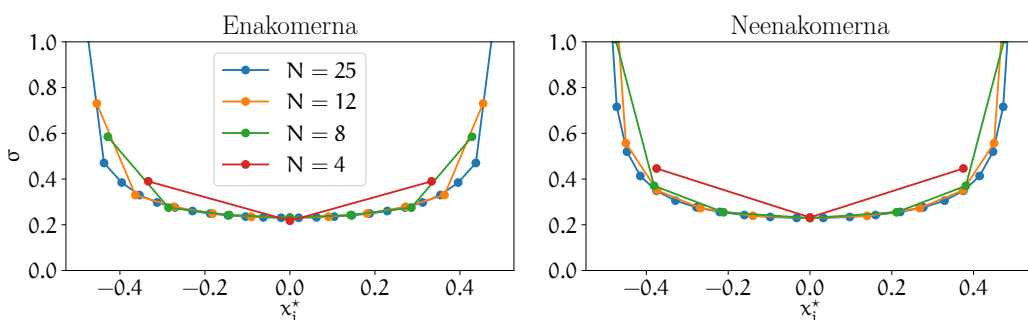
Gostota naboja torej divergira v koncih elektrode. Naš rezultat (slika 1 desno) se dobro ujema z analitično izračunanim izrazom. Implementacijo lahko še nekoliko izboljšamo, če delilne točke po elektrodi posujemo neenakomerno, in sicer tako, da jih zgostimo pri koncih. Na sliki 3 so prikazani rezultati, kjer so točke bile posejane s funkcijo $(1/2)(1 + \cos(\pi x))$. Opazimo, da se gostote nabojev na koncih boljše prilagajajo analitičnemu izrazu.

Podrobneje je gostota naboja na daljicah prikazana na sliki 4, na kateri je prikazana primerjava med enakomerno in neenakomerno porazdelitvijo N delilnih točk.

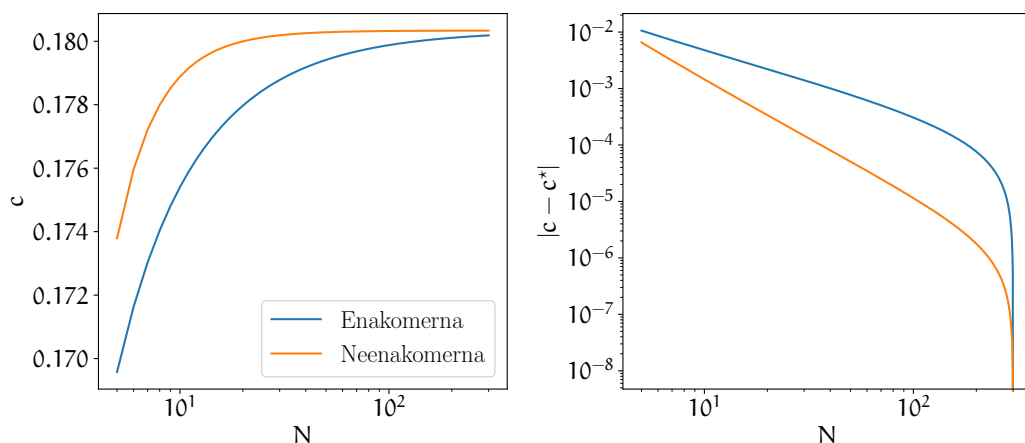
Izračunajmo sedaj kapacitivnost elektrode. Na sliki 5 je prikazana kapacitivnost pri različnem številu točk. Opazimo, da kapacitivnost konvergira proti vrednosti približno $c = 0,18$ za elektrodo z dolžino $d = 1$.



Slika 3: Potencial elektrode v obliki traku, kjer so delilne točke posejane neenakomerno.

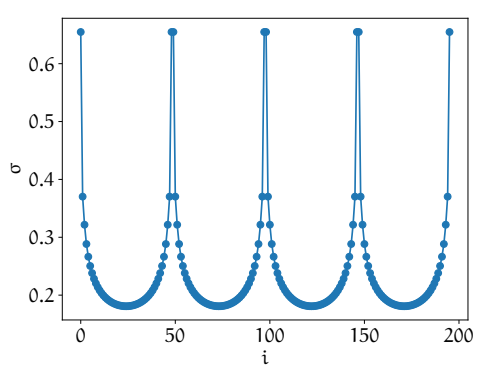
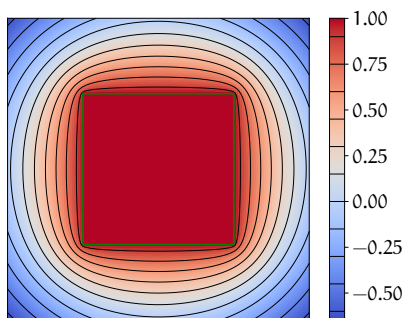
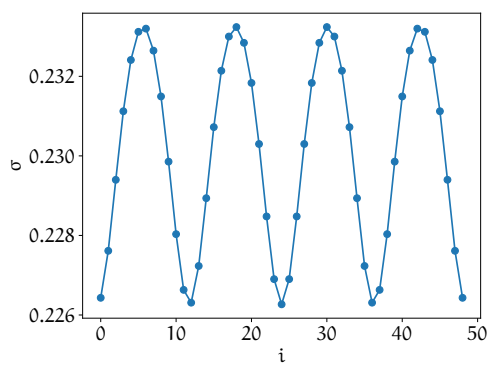
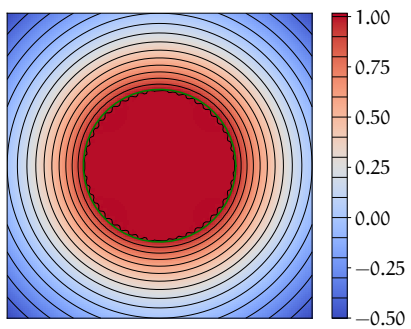
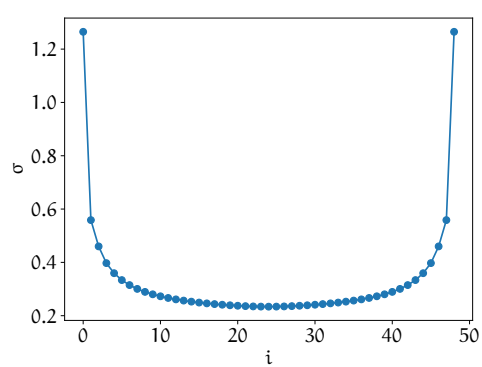
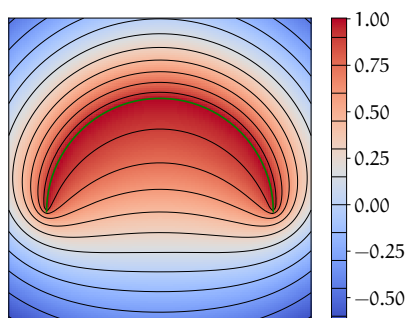
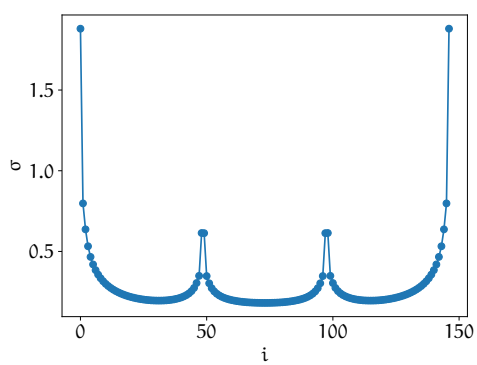
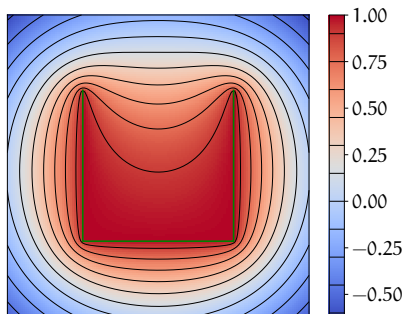


Slika 4: Primerjava med enakomerno (levo) in neenakomerno (desno) porazdelitvijo točk na elektrodi v obliki traku.



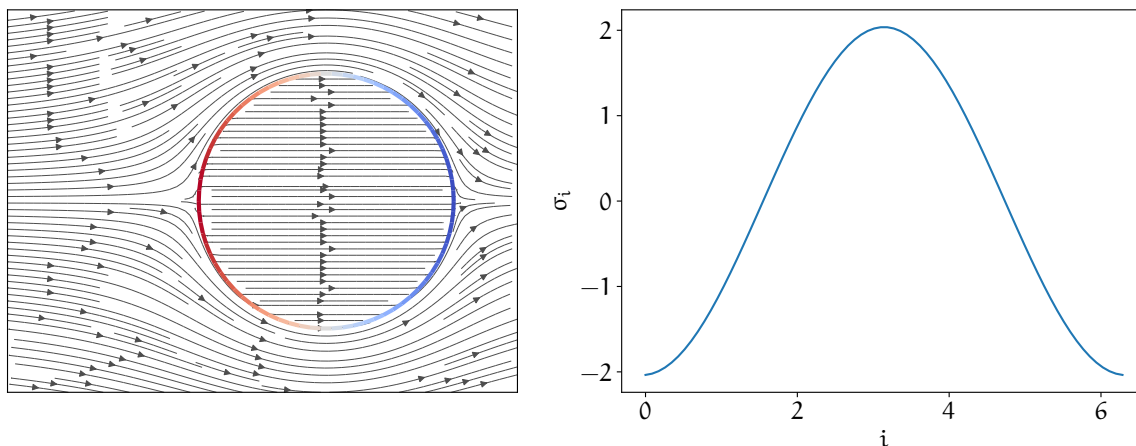
Slika 5: Kapacitivnost elektrode v obliki traku (levo) in razlika med končno vrednostjo c^* pri $N = 300$.

Za konec se poigrajmo še z elektrodami drugačnih oblik, med drugim lahko izračunamo tudi potencial sklenjene elektrode. Pričakujemo seveda, da bo potencial znotraj nje konstanten, kar se zares pokaže tudi pri izračunih. Gostote nabojev so prikazane glede na zaporedno številko daljice v diskretizaciji elektrode. Elektroda je narisana z zeleno krivuljo. Pri krožni elektrodi opazimo, da je gostota naboja približno konstantna, pri kvadratni elektrodi pa ponovno opazimo divergenco gostote v ogliščih kvadrata.

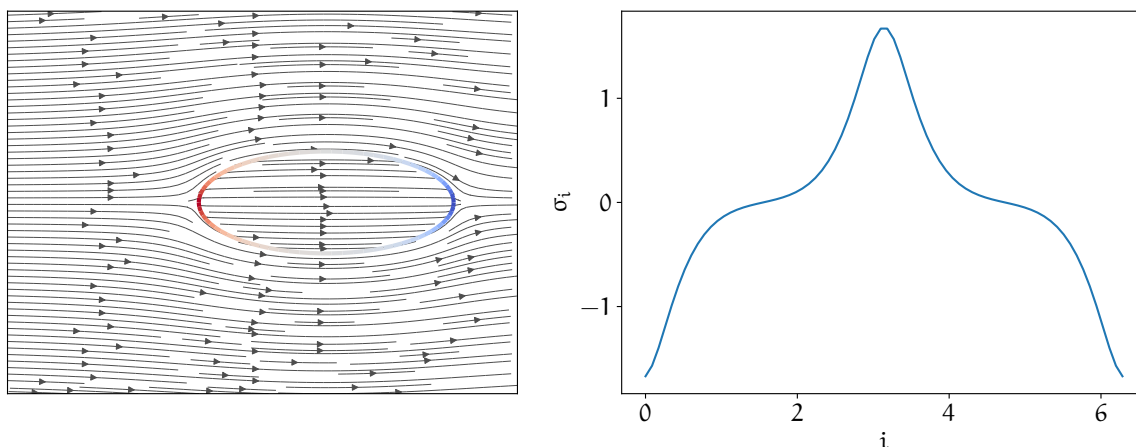


2.2 Hidrodinamika

Posvetimo se sedaj še hidrodinamiki. Na sliki 6 je prikazan hitrostni profil tekočine, ki obteka krožni profil. Rezultat je videti pravilen, v notranjosti območja je polje homogeno, na robu tekočina lepo obteka telo.



Slika 6: Hitrostni profil idelne tekočine, ki obteka krožni profil (levo). Barva prikazuje vrednost tlačno vrednost na posameznem delu telesa, s katero se telo upira tekočini. Vrednost σ_i za posamezno daljico (desno).



Slika 7: Hitrostni profil tekočine okoli eliptičnega telesa.

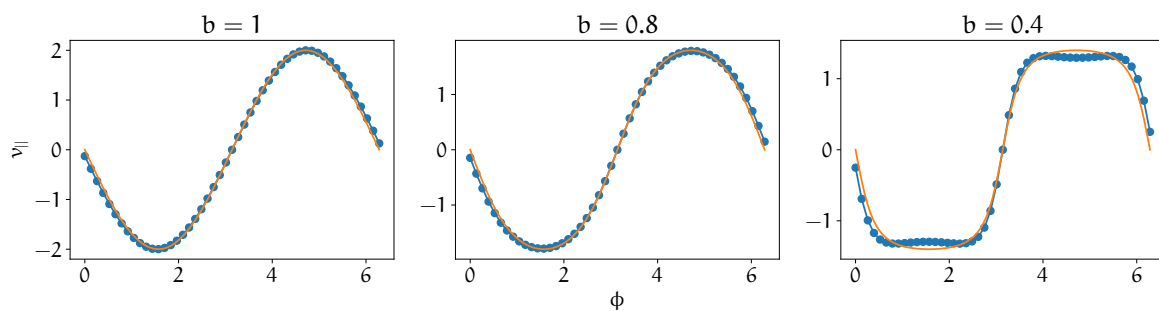
Sploščimo sedaj kroglo v elipso z majhno polosjo b . Rezultat je prikazan na sliki 7. Za eliptično telo ponovno poznamo analitično rešitev za tangencialno hitrost ob površini:

$$v_{||} = u_{\infty} \frac{(1+b)y}{\sqrt{y^2 + b^4 x^2}}.$$

Na sliki 8 je prikazana primerjava numeričnih izračunov z analitičnim izrazom za različne vrednosti b . Opazimo, da je ujemanje sicer dobro, vendar se pri majhnih b pojavi jo odstopanja na polih elipse. To je morda posledica premajhne gostote točk ali pa napačne implementacije algoritma.

Za konec si oglejmo še nekaj drugačnih profilov. Spremenimo lahko vpadni kot tekočine, kar je prikazano na sliki 9. Ogledamo si lahko tudi profil krila, imenovan NACA-00t, ki je parametriziran s funkcijo:

$$y(x) = \frac{t}{50} (1.457122\sqrt{x} - 0.624424x - 1.727016x^2 + 1.384087x^3 - 0.489769x^4).$$

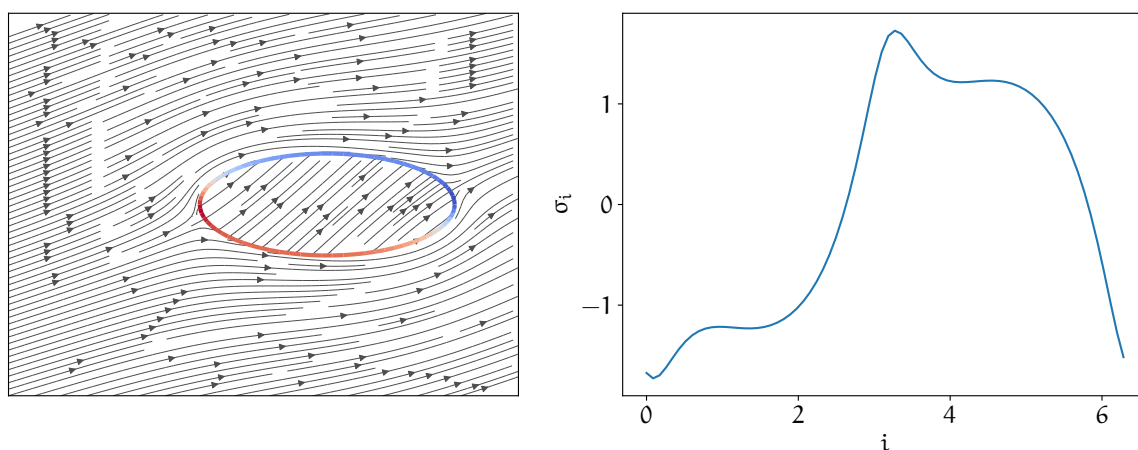


Slika 8: Primerjava tangencialne hitrosti ob površju elipse (parametrizirane s polarnim kotom ϕ), izračunane z BEM (modre točke), in analitične vrednosti (oranžno).

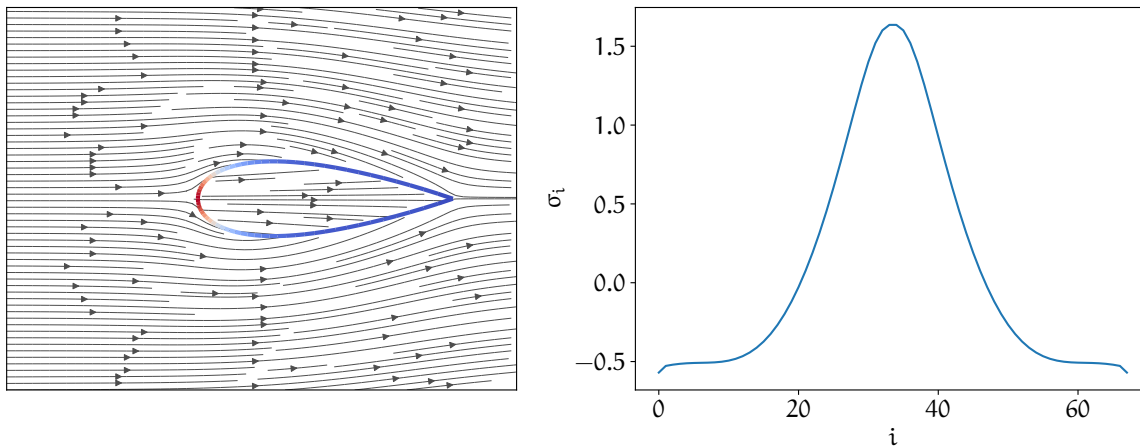
Dodatno si lahko ogledamo še profil krila Žukovskega, ki ga dobimo s transformacijo premaknjenega kroga:

$$z = A + iB + re^{i\phi}, \quad z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

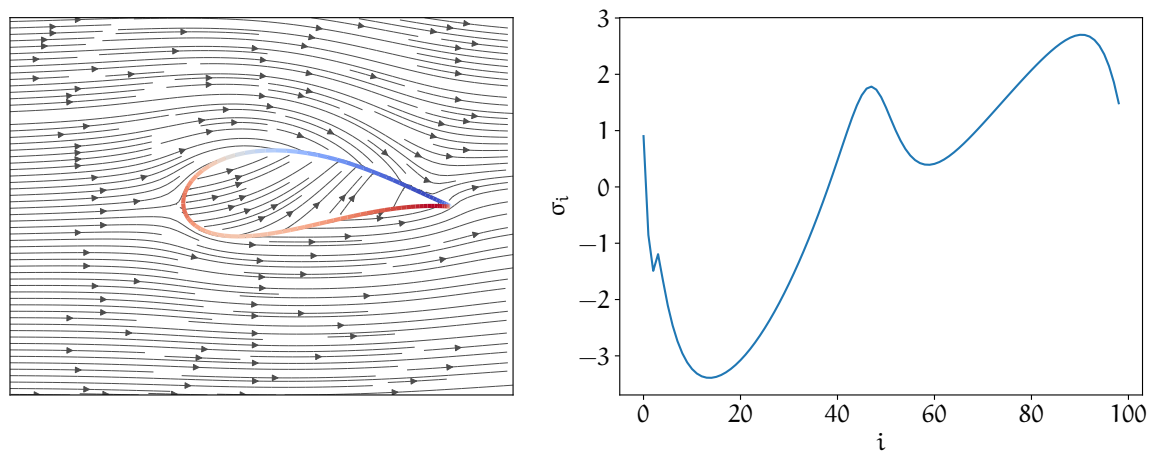
Transformacija je enaka kot pri iskanju analitične rešitve za električni potencial traku. Z enakim postopkom bi lahko torej analitično izračunali hitrostno polje okoli krila Žukovskega.



Slika 9: Hitrostni profil tekočine, ki vpada na elipso pod kotom 0.3.



Slika 10: Hitrostni profil tekočine, ki vpada na krilo NACA-0015.



Slika 11: Hitrostni profil tekočine, ki vpada na krilo Žukovskega ($A = 0.18$, $B = 0.1$, $r = 0.8$).