

Metoda končnih elementov: lastne rešitve

8. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Metoda končnih elementov – lastne vrednosti

Zanimamo se za lastne načine nihanja različnih open netriviralnih oblik. Rešitve dobimo z iskanjem lastnih vrednosti operatorja $\nabla^2 + k^2$, problem pa prevedemo v variacijsko obliko:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \implies S(u) = \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla u \rangle - \frac{1}{2} \lambda \langle u, u \rangle$$

Rešitev poiščemo z nastavkom:

$$u(x, y) = \sum_i c_i \phi_i(x, y),$$

pri čemer so ϕ_i poskusne funkcije. Minimizacija funkcionala po ($\frac{\partial S}{\partial c_i} = 0$) vodi v iskanje posplošenih lastnih vrednosti $A\mathbf{c} = \lambda B\mathbf{c}$, pri čemer so elementi matrik enaki:

$$A_{ij} = \langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle$$

$$B_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$$

Če uporabimo najpreprostejše piramidalne poskusne funkcije ϕ_i , se matrični elementi izrazijo kot:

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \sum_{j,k} \frac{d^2(j, k)}{4S(i, j, k)} & A_{ij} &= \sum_k \frac{x(j, k)x(k, i) + y(j, k)y(k, i)}{4S(i, j, k)} \\ B_{ii} &= \sum_{j,k} \frac{S(i, j, k)}{6} & B_{ij} &= \sum_k \frac{S(i, j, k)}{12} \end{aligned}$$

Problem posplošenih lastnih vrednosti lahko sedaj rešimo z uporabo splošnih knjižnic, lahko pa predhodno problem s transformacijo prevedemo na problem navadnih lastnih vrednosti. Ker je B pozitivno definitna matrika, jo lahko razstavimo po razcepu Choleskega $B = LL^T$. Sledi:

$$\begin{aligned} A\mathbf{c} &= \lambda LL^T \mathbf{c} \\ L^{-1}A\mathbf{c} &= \lambda L^{-1}LL^T \mathbf{c} = \lambda \underbrace{L^T \mathbf{c}}_{\mathbf{b}} \\ \underbrace{L^{-1}A(L^{-1})^T}_{\mathbf{C}} \mathbf{b} &= \lambda \mathbf{b} \\ \mathbf{C}\mathbf{b} &= \lambda \mathbf{b} \end{aligned}$$

2 Reševanje

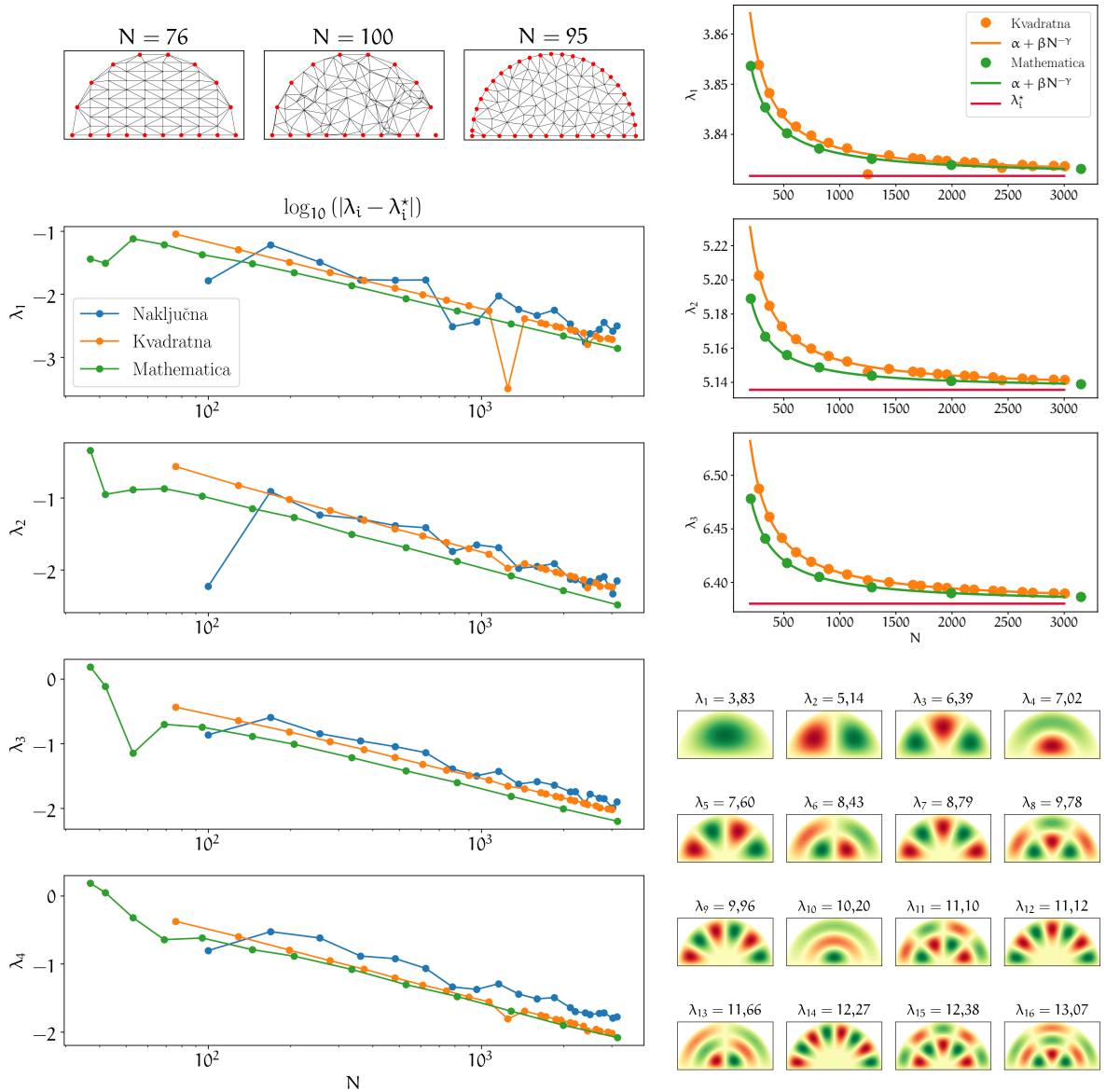
Sistem sem zapisal z redkimi matrikami (`scipy.sparse`) in uporabil metodo za iskanje posplošenih lastnih vrednosti (`scipy.sparse.linalg.eigs`). Sistem s potenčnimi Galerkinovimi funkcijami sem reševal s polnimi matrikami in s transformacijo na navadni problem lastnih vrednosti. Pri tem sem z metodo za reševanje trikotnih sistemov `scipy.linalg.solve_triangular` rešil $LY^T = A^T$ in nato $LC = Y$.

3 Polkrožna opna

Analična rešitev za lastne nihajne načine polkrožne opne, izražena v polarnih koordinatah, je:

$$u_{mn}(r, \phi) = A_{mn} J_m(\xi_{m,n} r) \sin(m\phi),$$

pri čemer je J_m Besselova funkcija reda m , $\xi_{m,n}$ pa njena n -ta ničla. Velja torej, da so lastne vrednosti koren Besselovih ničel, $\tilde{\lambda}_i^* = \lambda_{mn}^* = \xi_{m,n}^2$. Zaradi enostavnejše primerjave z analitičnimi rešitvami so v spodnjih rezultatih uporabljeni koreni lastnih vrednosti $\lambda_i^* = (\tilde{\lambda}_i^*)^{1/2} = \xi_{m,n}$. Na sliki 1 so prikazane prve štiri lastne vrednosti pri treh različnih diskretizacijah polkroga. Prikazana je absolutna napaka izračunane lastne vrednosti λ_i od analitične lastne vrednosti λ_i^* . Opazimo lahko, da diskretizacija z Mathematico daje točnejše rešitve od ostalih dveh diskretizacij. Prikazan je tudi potek točnosti s povečevanjem števila točk N , na katerega je prilegana potenčna funkcija (razen za naključno diskretizacijo): $\lambda(N) = \alpha + \beta N^{-\gamma}$. Vrednost α nam služi za ekstrapolacijo: $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(N) = \alpha$, medtem ko eksponent γ pove hitrost konvergence in je pri prikazanih prileganjih znašal $\gamma \approx 1$.



Slika 1: Tri različne diskretizacije polkroga (levo zgoraj). Absolutna napaka prvih 4 lastnih vrednosti za polkrožno opno (levo). Prileganje potenčne funkcije na izračunane lastne vrednosti pri različnem številu točk N (desno zgoraj). Prvih 16 nihajnih načinov polkrožne opne s pripadajočimi lastnimi vrednostmi (desno spodaj).

3.1 Potenčni Galerkinov nastavek

Glede na simetrijo polkroga lahko uporabimo boljše poskusne funkcije. S sinusom zagotovimo ničle na spodnji daljici polkroga, radialno odvisnost pa naj bo potenčna:

$$\phi_i = \phi_{mn}(r, \phi) = r^{m+n}(1-r) \sin(m\phi), \quad m \in \mathbb{N} \dots, n \in \mathbb{N}_0$$

Izberimo si končno število ($\mathcal{N}$) funkcij ϕ_i , tako da izberemo število m -jev ($\mathcal{N}_\phi$) in število n -jev ($\mathcal{N}_r$):

$$\{\phi_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\mathcal{N}}\} = \{\phi_{10}, \phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{1(\mathcal{N}_r-1)}, \phi_{21}, \phi_{22}, \dots, \phi_{\mathcal{N}_\phi(\mathcal{N}_r-1)}\}$$

in izračunajmo elemente matrik A in B:

```

In[ ]:=  $\Phi[m\_ , n\_ ] := r^{m+n} (1-r) \sin[m \phi]$ 
Grad $\Phi[m\_ , n\_ ] := \text{Grad}[\Phi[m, n], \{r, \phi\}, \text{"Polar"}]$ 

In[ ]:=  $A = \text{Assuming}[m \in \mathbb{Z}_{>0} \ \&\& \{k, l\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \int_0^1 \int_0^\pi \text{Grad}\Phi[m, k] . \text{Grad}\Phi[m, l] r \, d\phi \, dr]$ 

Out[ ]:=  $\frac{(k+1+2kl+2(1+k+1)m+4m^2)\pi}{2(k+1+2m)(1+k+1+2m)(2+k+1+2m)}$ 

In[ ]:=  $B = \text{Assuming}[m \in \mathbb{Z}_{>0} \ \&\& \{k, l\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \int_0^1 \int_0^\pi \Phi[m, k] \times \Phi[m, l] r \, d\phi \, dr]$ 

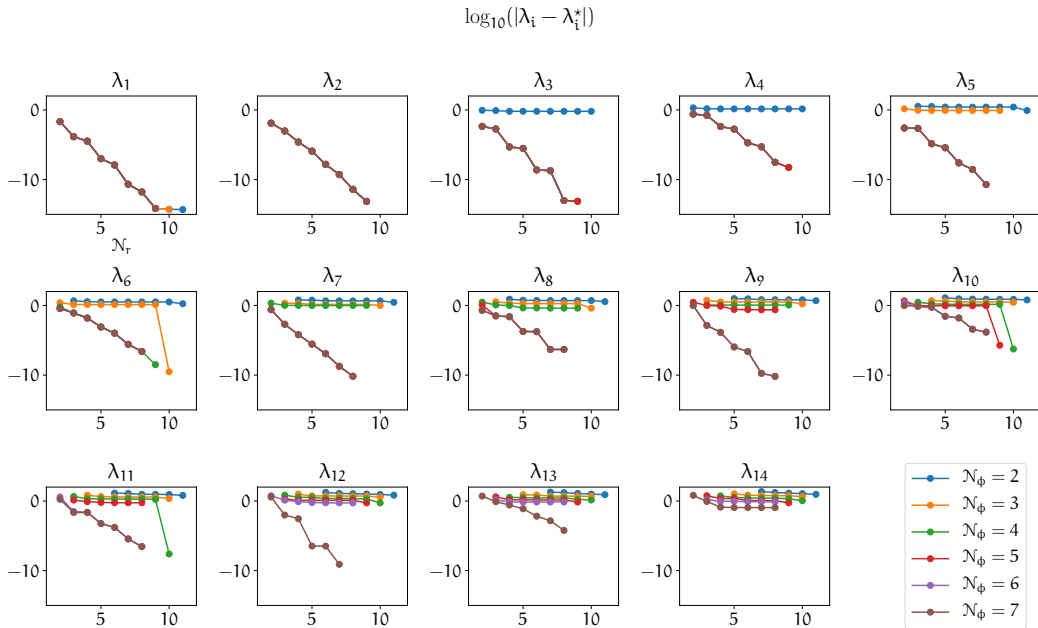
Out[ ]:=  $\frac{\pi}{(2+k+1+2m)(3+k+1+2m)(4+k+1+2m)}$ 

In[ ]:=  $\text{CanculaA} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{kl}{2m+k+1} - \frac{2kl+k+1}{2m+k+1+1} + \frac{(k+1)(1+1)}{2m+k+1+2} \right);$ 
 $\text{CanculaB} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2m+k+1+2} - \frac{2}{2m+k+1+3} + \frac{1}{2m+k+1+4} \right);$ 
 $A == \text{CanculaA} \ \&\& \ B == \text{CanculaB} // \text{Reduce}$ 

Out[ ]:= True

```

Na sliki 2 je prikazana absolutna napaka prvih 9 lastnih vrednosti, izračunanih s potenčnim nastavkom pri različnem številu potenčnih funkcij $\mathcal{N} = \mathcal{N}_r \mathcal{N}_\phi$. Opazimo, da je za izračun višjih lastnih vrednosti ključno vključiti zadostno število m -jev (dovolj velik $\mathcal{N}_\phi$). Začuda pa se pri prevelikem številu poskusnih funkcij metoda zlomi in ne najde več ustreznih lastnih rešitev (na grafih se tam črta konča), saj matrika B ni več pozitivno definitna. Prav tako pri višjih lastnih vrednosti prihaja do netočnosti, saj metoda vrne nove, vrinjene lastne vrednosti. Za primerjavo z analitičnimi lastnimi vrednostmi bi torej te odvečne lastne vrednosti moral ustrezno odstraniti.



Slika 2: Absolutna napaka prvih 9 lastnih vrednosti λ_i/λ_i^* z Galerkinovim nastavkom potenčnih funkcij.

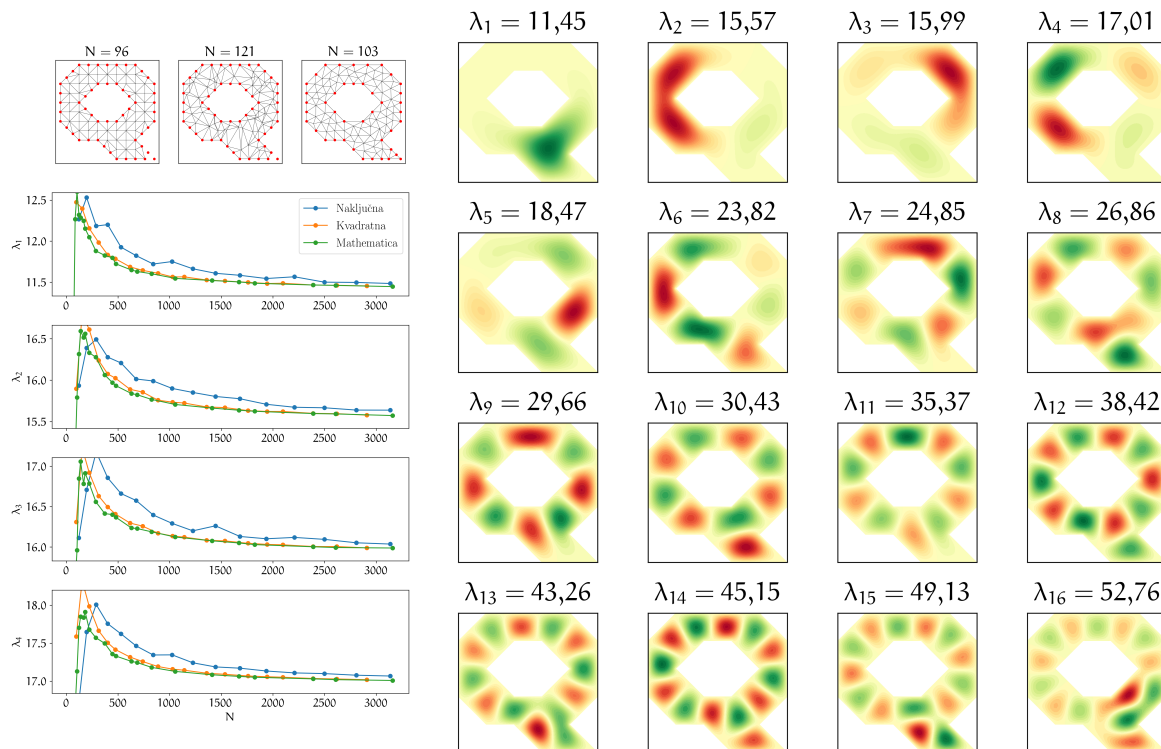
3.2 Primerjava metod

V spodnji tabeli sem združil izračunane lastne vrednosti pri štirih različnih načinih računanja. Pri metodi končnim elementov sem uporabil ekstrapolirano vrednost α . Galerkinova metoda je bila izračunana z $N = N_r N_\phi = 3 \cdot 2 = 6$ in $N = N_r N_\phi = 8 \cdot 5 = 40$. Opazimo, da so nižje lastne vrednosti bolj točne kot višje. Galerkinova metoda z zadostnim številom funkcij pa daje najbolj točne lastne vrednosti.

i	Galerkin	Ekstrapolacija FEM		Galerkin	Točna vrednost (λ_i^*)
	$N = 6$	Kvadratna	Mathematica	$N = 40$	
1	3,8319	3,8319	3,8315	3,831 706 0	3,831 706 0
2	5,1366	5,1359	5,1362	5,135 622 3	5,135 622 3
3	7,1845	6,3802	6,3796	6,380 161 9	6,380 161 9
4	8,5007	7,0163	7,0136	7,015 586 7	7,015 586 7
5	10,9408	7,5886	7,5910	7,588 342 4	7,588 342 4
6	13,0902	8,4192	8,4167	8,417 244 4	8,417 244 1
7		8,7694	8,7706	8,771 483 8	8,771 483 8
8		9,7573	9,7537	9,761 023 6	9,761 023 1

4 Črka Q

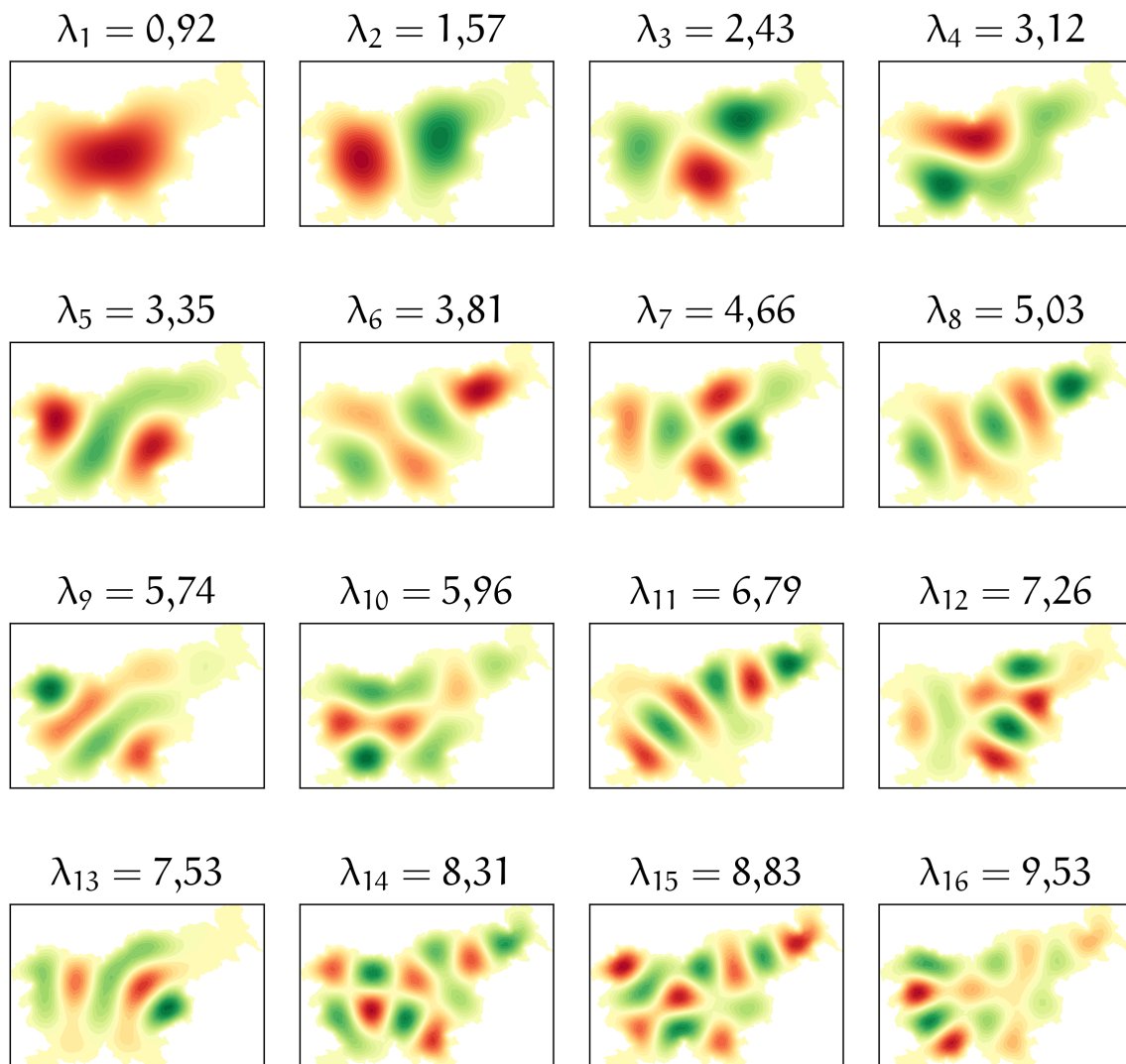
Z isto metodo lahko poiščemo tudi lastne nihajne načine poljubno oblikovane opne. Lastne vrednosti so tokrat izražene kot $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i / \pi^2$, tako da jih lahko primerjamo z lastnimi števili za kvadratno opno.



Slika 3: Diskretizacija, lastne vrednosti in lastni nihajni načini opne v obliki črke Q. Lastni načini so izračunani z $N = 3159$ točkami in diskretizacijo v Mathematici.

5 Slovenija

Za konec si kot zanimivost ogledimo še lastne nihajne načine opne v obliki Slovenije. Lastne vrednosti so skalirane enako kot pri črki Q. Opazimo, da pri višjih lastnih vrednostih črka Q deluje kot obroč, znotraj katerega se enakomerno razporedijo minimumi in maksimumi.



Slika 4: Lastni nihajni načini opne v obliki Slovenije, izračunani z $N = 1790$ točkami in diskretizacijo v Mathematici.