

Metoda končnih elementov: Poissonova enačba

7. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Metoda končnih elementov

Rešujemo problem:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + q(x, y)v = f(x, y), & (x, y) \in \mathcal{R} \\ v(x, y) &= \alpha(x, y) & (x, y) \in \partial\mathcal{R}\end{aligned}$$

Rešimo ga tako, da ga prevedemo v variacijsko obliko. Z leve pomnožimo skalarno s funkcijo w . Rešitev v bo hkrati tudi rešitev PDE za vsak w :

$$\langle w | \mathcal{L} - v \rangle = 0 \quad \forall w \in L^2(a, b).$$

Numerično lahko poiščemo le rešitev u , ki je približek prave rešitve v . Funkciji u in w zapišemo v bazi testnih funkcij ϕ_j in ψ_j :

$$v \approx u = \sum_{j=1}^J c_j \phi_j, \quad w \approx \tilde{w} = \sum_{j=1}^J d_j \psi_j.$$

Galerkinova metoda Reševanje problema si lahko olajšamo, če izberemo $\phi_j = \psi_j$. Po integraciji prvotnega problema dobimo simetrično formo

$$\begin{aligned}A_{mn}^{(t)}(w, u) &= \iint_{T_t} \left[p(\nabla \phi_m)^T \cdot \nabla \phi_n + q \phi_m \phi_n \right] dx dy \\ \langle w | f \rangle_m^{(t)} &= \iint_{T_t} \phi_m f dx dy\end{aligned}$$

Ker se ukvarjamo s Poissonovo enačbo $-\nabla^2 v = f$, se zgornja izraza poenostavita ($p = 1$ in $q = 0$):

$$\begin{aligned}A_{mn}^{(t)} &= \frac{1}{4\text{pl}(\Delta_t)} [(y_{m+2} - y_{m+1})(y_{n+2} - y_{n+1}) + (x_{m+1} - x_m)(x_{n+2} - x_{n+1})] \\ \langle w | f \rangle_m^{(t)} &= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_{m+1} - x_m & x_{m+2} - x_m \\ y_{m+1} - y_m & y_{m+2} - y_m \end{pmatrix} f(x_{T\Delta_t}, y_{T\Delta_t}),\end{aligned}$$

pri čemer je $\text{pl}(\Delta_t)$ ploščina trikotnika z indeksom t , $x_{T\Delta_t}$ in $y_{T\Delta_t}$ koordinati njegovega težišča, indeksa m in n pa tečeta od 1 do 3. Izraze zložimo v skupno matriko:

$$\begin{aligned}S_{ij} &= \sum_{m, n \in \{1, 2, 3\}} \sum_{\substack{m | i = \tau(t, m) \\ n | j = \tau(t, n)}} A_{mn}^{(t)}, \\ g_i &= \sum_{m \in \{1, 2, 3\}} \sum_{m | i = \tau(t, m)} \langle w | f \rangle_m^{(t)},\end{aligned}$$

pri čemer $\tau(t, m)$ označuje indeks m -tega vozlišča trikotnika t . Rešitev dobimo tako, da rešimo sistem linearnih enačb za c :

$$Sc = g.$$

2 Območja

Metodo končnih elementov sem preizkusil na sedmih različnih območjih, in sicer krogu, polkrogu, kvadratu, kvadratu z luknjo, večkotniku (desetkotniku) ter oblikah držav Slovenije in Italije. Območja držav sem pridobil iz podatkovnega repozitorija *Wolfram Data Repository* in uporabil centrirano Mercatorjevo projekcijo:

```
ObmocjeSlovenija = CountryData["Slovenia", {"Polygon", {"Mercator", Center}}];
```

3 Diskretizacija območja in triangulacija

Za reševanje moramo območje $\mathcal{R}$ razdeliti na končno velike elemente. Najprimernejši za to so kar trikotniki, postopek pa imenujemo triangulacija. Izbira trikotnikov je sicer poljubna, vendar so za numerično stabilnost primerni trikotniki, ki imajo kote približno enako velike (torej nobeden izmed kotov naj ne bo pretirano oster). Pri reševanju sem opazoval tri različne metode diskretizacije območja pri različnem številu točk N .

3.1 Naključne točke

Diskretizacijo z naključnimi točkami sem izvedel tako, da sem najprej ekvidistančno diskretiziral rob s približno $N_\partial \sim \sqrt{N}$ točkami po eni stranici območja. Nato sem po enakomerni porazdelitvi žrebal točke iz očičrtanega pravokotnika, dokler jih v izbrano območje ni padlo $N - \sum N_\partial$.

Po diskretizaciji sem izvedel Delaunayjevo triangulacijo s knjižnico `scipy.spatial.Delaunay`.

3.2 Kvadratna mreža

Kvadratno mrežo sem tvoril na očičrtanem pravokotniku in obdržal točke, ki so padle v notranjost območja. Pri kvadratu z luknjo in večkotniku sem izbiral tako gostoto točk, da so mrežne točke sovpadle z robom območja, tj. $N_{k. z. l.} \propto (3n + 4)^2$ in $N_{večk.} \propto (4n)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Po diskretizaciji sem izvedel Delaunayjevo triangulacijo.

3.3 Wolfram Mathematica

Za optimalnejšo diskretizacijo sem uporabil funkcijo `DiscretizeRegion` iz sistema *Wolfram Mathematica*. Metoda sprejme rob območja in ga diskretizira ter triangulira, pri čemer lahko določimo maksimalno dovoljeno velikost trikotnikov (`MaxCellMeasure`), s čimer posredno vplivamo na število elementov. V dokumentaciji nisem našel zapisano, kateri algoritem leži v ozadju funkcije.

4 Robni pogoji

Naj bo množica $\mathcal{J}$ množica vseh indeksov robnih točk. Robne pogoje implementiramo tik pred reševanjem sistema $\mathbf{S}\mathbf{c} = \mathbf{g}$ tako, da v matričnem sistemu izničimo reševanje koeficientov $\mathbf{c}_{i^*}$ za robne točke $i^* \in \mathcal{J}$. Za točko $\mathbf{r}_{i^*}$ nastavimo robni pogoj $\mathbf{r}_{i^*} = \alpha$ kot

$$S_{i^*,j} = S_{i,i^*} = 0, \quad S_{i^*,i^*} = 1, \quad g_{i^*} = \alpha.$$

5 Reševanje sistema

Sistem sem zapisal z redkimi matrikami (`scipy.sparse`) in uporabil metodo za reševanje sistema linearnih enačb z redkimi matrikami (`scipy.sparse.linalg.spsolve`).

6 Izračun Poisseuillovega koeficienta

Če izračunano hitrostno polje integriramo po celotni površini, dobimo celotni volumni pretok:

$$\iint v(x,y) dx dy = \Phi,$$

tega pa povežemo s Hagen-Poiseullovim zakonom, iz katerega izrazimo Poisseuilleov koeficient:

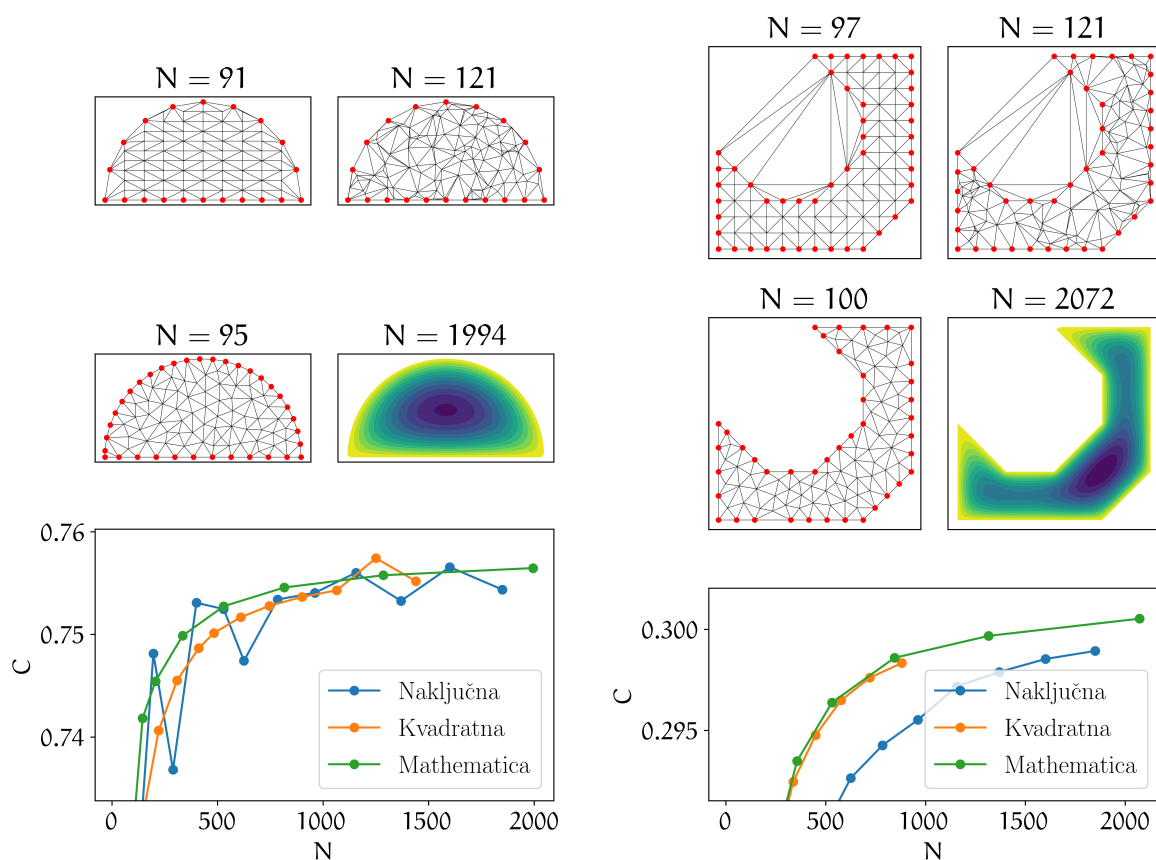
$$\Phi_V = C \frac{S^2}{8\pi} \quad C = \frac{8\pi\Phi}{S^2}.$$

Integracijo sem izvedel kot vsoto volumnov vseh trikotnih prizm:

$$\Phi \approx \sum_t p l(\Delta_t) \frac{v_1^{(t)} + v_2^{(t)} + v_3^{(t)}}{3}$$

7 Rezultati in interpretacija

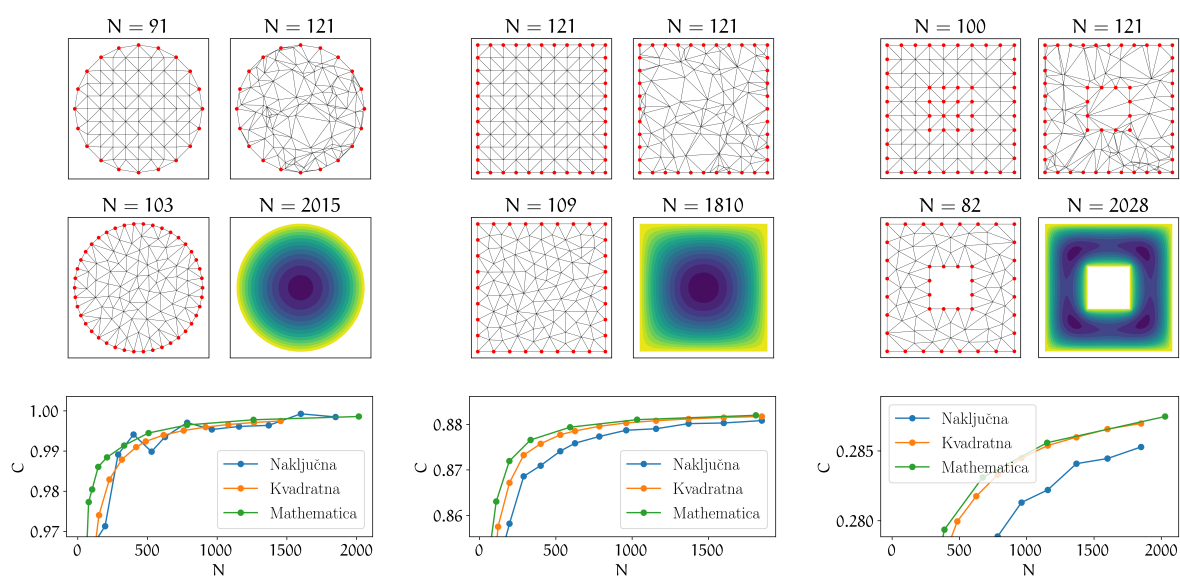
Na spodnjih slikah so prikazani rezultati za vseh sedem območij. Prikazani so primeri diskretiziranih in trianguliranih območij s približno $N \approx 100$ vozlišči za vse tri načine diskretizacije (kvadratna mreža [levo zgoraj], naključna mreža [desno zgoraj], Mathematica [sredina levo]) ter hitrostno polje pri največjem številu vozlišč (sredina desno), izrisano s 15 konturami. Rdeče točke označujejo robne točke. Prav tako so prikazani izračunani Poisseuillovi koeficienti pri različnem številu točk in metodi diskretizacije (spodaj).



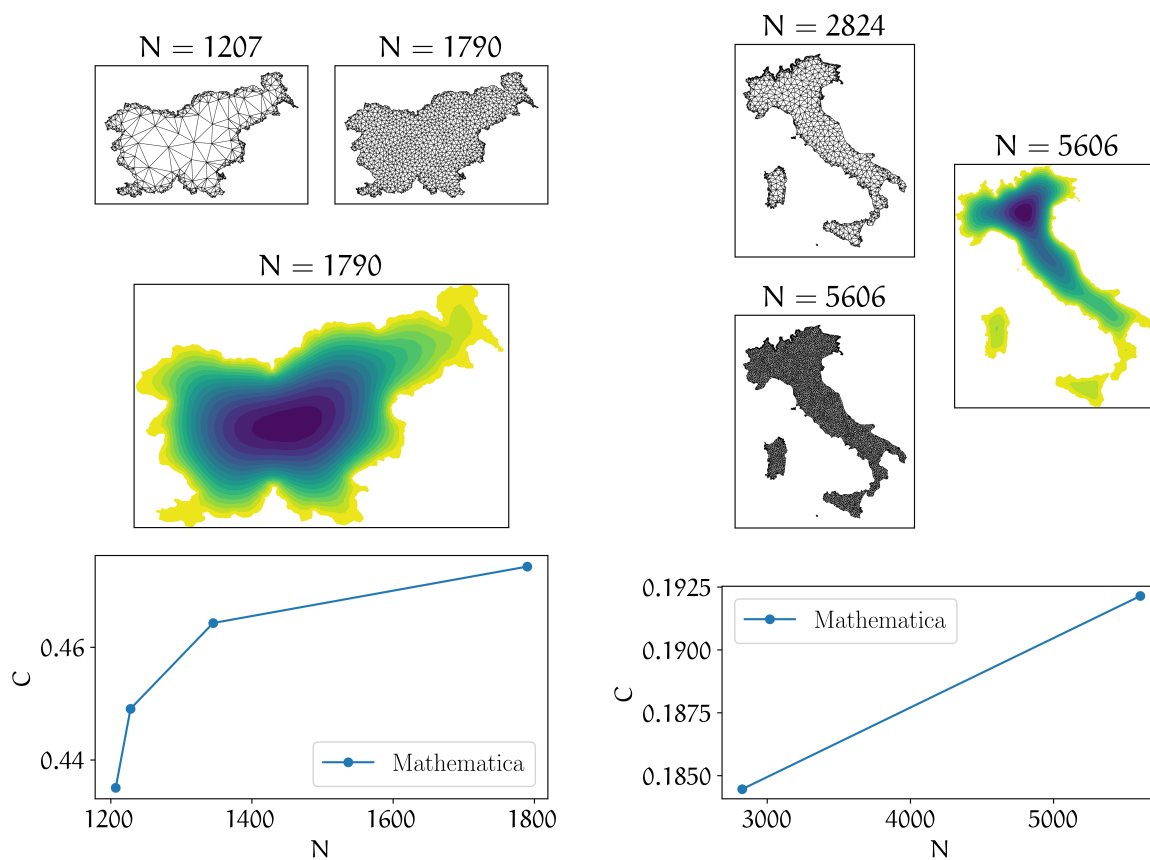
Slika 1: Polkrog in večkotnik.

Glavne ugotovitve:

- ★ Za vse tri metode diskretizacije Poisseuillov koeficient C kvalitativno konvergira h končni vrednosti.
- ★ Pri vseh izbranih likih konsistentno opazimo, da kakovost triangulacije pri izbranem številu vozlišč N sledi redu *naključna* < *kvadratna* < *Mathematica*. V redkih primerih naključna mreža pri nekem številu vozlišč prekosi ostali dve.
- ★ Diskretizacija z Mathematico naredi trikotnike približno enake velike in približno enakostranične. Pri zapletenih območjih, kot sta državi, ob robovih zmanjša trikotnike.
- ★ Z izbiro $N = 1000$ točk je napaka P . koeficienta C približno 0,5 %.



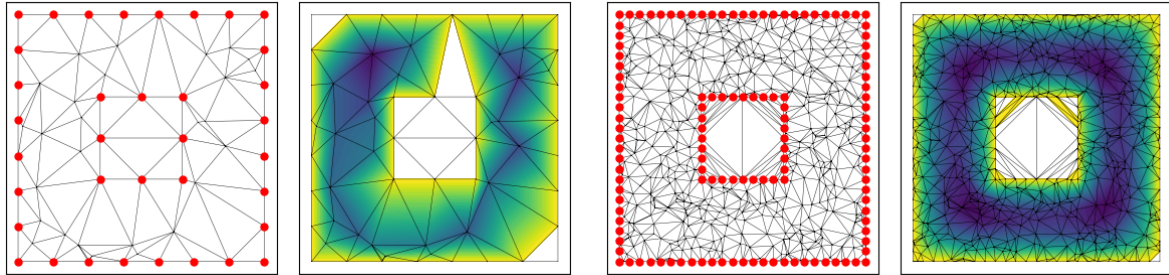
Slika 2: Krog, kvadrat in kvadrat z luknjo.



Slika 3: Slovenija in Italija.

8 Artefakti

Če izberemo premalo število točk pri diskretizaciji, prihaja do artefaktov. Najpogosteje imamo velike manjkajoče luknje na robovih, ki jih tvorijo trikotniki s tremi robnimi točkami. Pri naključni izbiri točk pa lahko Delaunayjeva triangulacija tvori trikotnike, ki potekajo čez zunanost območja.



Slika 4: Artefakti pri kvadratu z luknjo.