

Parcialne diferencialne enačbe: lastne rešitve

6. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Lastne rešitve PDE

Obravnavamo valovno enačbo

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

na kvadratni domeni $[0, 1] \times [0, 1]$. Zanimajo nas lastni nihajni načini, torej lastne funkcije Laplaciana s pripadajočimi lastnimi vrednostmi. Problem diskretiziramo na ekvidistančni kvadratni mreži velikosti $N \times N$ z medmrežno razdaljo $h = 1/N$, $u(x, y) \rightarrow u_{ij}$. Z diskretizacijo Laplaciana problem prevedemo na sistem enačb

$$\frac{1}{h^2} \left(\sum_{nn} u - 4u_{ij} \right) + k^2 u_{ij} = 0,$$

oziroma strnjeno zapisano v problem lastnih vrednosti matrike A :

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Običajno nas zanimajo najnižje lastne vrednosti, za kar je najprimernejša inverzna potenčna metoda. Pri tej metodi tvorimo matriko $(A - \sigma I)^{-1}$, pri čemer σ predstavlja vrednost, blizu katere želimo poiskati lastno vrednost. Iterativno ponavljamo korake:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i+1} &= (A - \sigma I)^{-1} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{y}_{i+1} / \|\mathbf{y}_{i+1}\| \\ \lambda_{i+1} &= \mathbf{x}_{i+1}^T A \mathbf{x}_{i+1} \end{aligned}$$

do želene natančnosti. Prvi korak iteracije ne rešujemo z inverzom, temveč kot matrično enačbo $(A - \sigma I)\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{x}_i$.

Problem otežimo tako, da kvadratno domeno naredimo nehomogeno. Rešimo ga podobno kot prej, le da tokrat rešujemo splošeni problem lastnih vrednosti

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x},$$

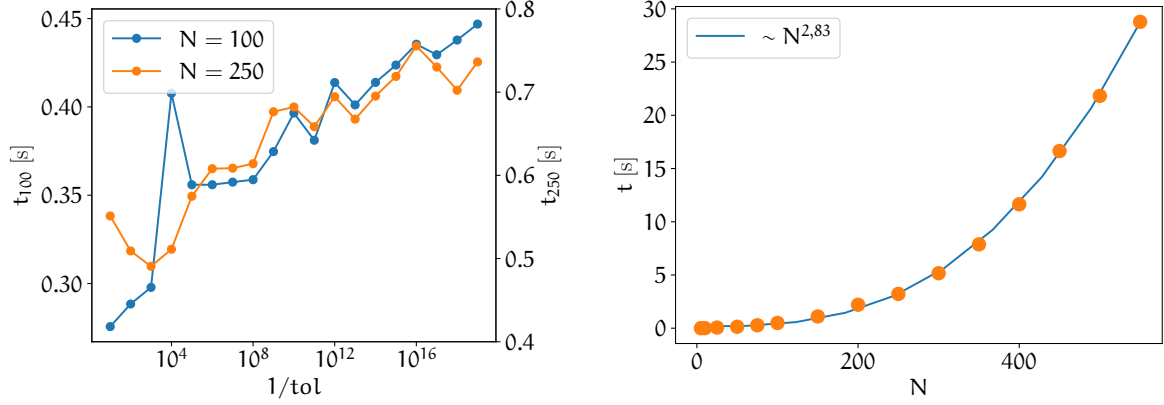
pri čemer je A diskretizirani Laplacian, B pa (diagonalna) matrika obtežitve, ki vsebuje plosčinsko gostoto posamezne točke domene. Z nekaj algebrainimi triki lahko problem reduciramo nazaj na navadni problem lastnih vrednosti $C\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, pri čemer smo izvedli transformaciji $C_{ij} = A_{ij}/\sqrt{B_{ii}B_{jj}}$ in $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i/\sqrt{B_{ii}}$.

2 Implementacija

Matriko sem zapisal kot redko diagonalno matriko `dia_matrix` s knjižnico `scipy.sparse`. Za reševanje sem uporabil vgrajeno rutino `scipy.sparse.linalg.eigsh`, ki poišče lastne vrednosti in lastne vektorje z inverzno potenčno metodo, tako da nastavimo pomik $\sigma = 0$. Za izračun natančnosti pri posamezni iteraciji sem inverzno potenčno metodo ročno implementiral z uporabo `scipy.sparse.linalg.spsolve`.

3 Rezultati

Časovno zahtevnost rutine `eigsh` sem meril z običajnim merjenjem pretečenega časa, pri čemer sem za vsak izbran parameter naredil 5 ponovitev in povprečil. Na sliki 1 je prikazana časovna zahtevnost v



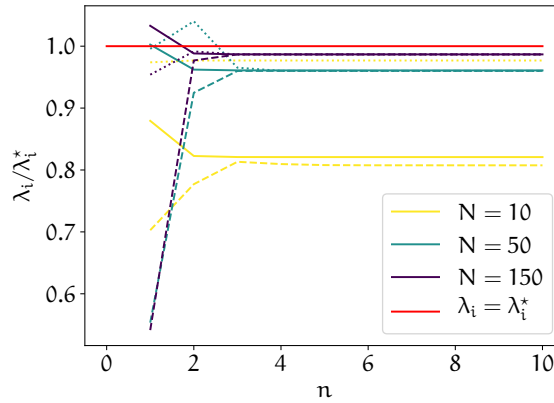
Slika 1: Časovna zahtevnost rutine `sparse.linalg.eigsh` v odvisnosti od nastavljene tolerance `tol` (levo) in velikosti mreže N (desno).

odvisnosti od želene natančnosti, kar nastavimo s parametrom `tol`, pri dveh različnih velikostih mreže, ter časovna zahtevnost v odvisnosti od velikosti mreže pri nastavljeni $\text{tol} = 10^{-5}$. Opazimo, da časovna zahtevnost narašča z velikostjo mreže približno $t \sim N^{2,8}$.

Za preverjanje točnosti metode in hitrosti konvergence sem ročno implementiral inverzno potenčno metodo. Na sliki 2 opazimo, da metoda konvergira že po prvih nekaj korakih, medtem ko se točnost izboljšuje z večanjem velikosti mreže. Numerične lastne vrednosti so primerjane z analitičnimi vrednostmi za lastne vrednosti Laplaciana na kvadratni domeni:

$$\lambda^* = m^2 + n^2 \in \{2, 5, 8, 10, \dots\},$$

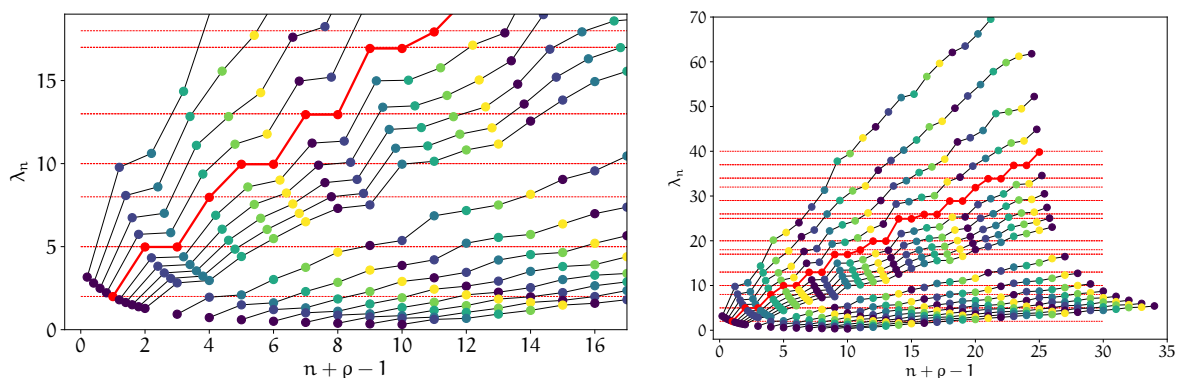
pri čemer sem v rezultatih konsistentno izpuščal predfaktor π^2 .



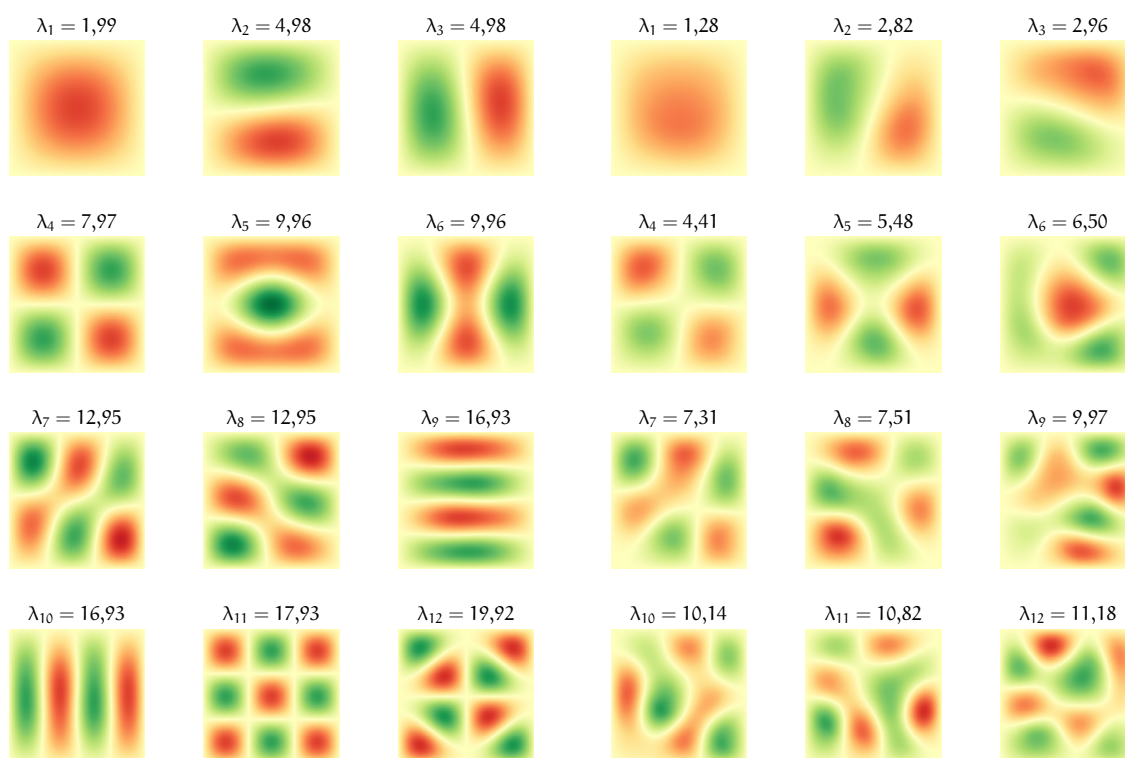
Slika 2: Relativna napaka numerično izračunane lastne vrednosti λ_i za prve tri lastne vrednosti pri treh različnih velikostih mreže.

Odvisnost spektra od gostote večkotnika v domeni sem računal na mreži velikosti $N = 500$ s toleranco 10^{-6} , tako da je vsako izvajanje rutine `eigsh` trajalo približno 30 s. Na sliki 3 je prikazan spekter za homogeno kvadratno domeno (rdeče) in za različne gostote večkotnika. V spektru homogene domene opazimo značilne dvojne degeneracije lastnih vrednosti ($\lambda_2 = \lambda_3, \lambda_5 = \lambda_6, \dots$), ki pa ob prisotnosti nehomogenosti izginejo. S povečevanjem gostote večkotnika se spekter znižuje – lastne frekvence se torej zmanjšujejo.

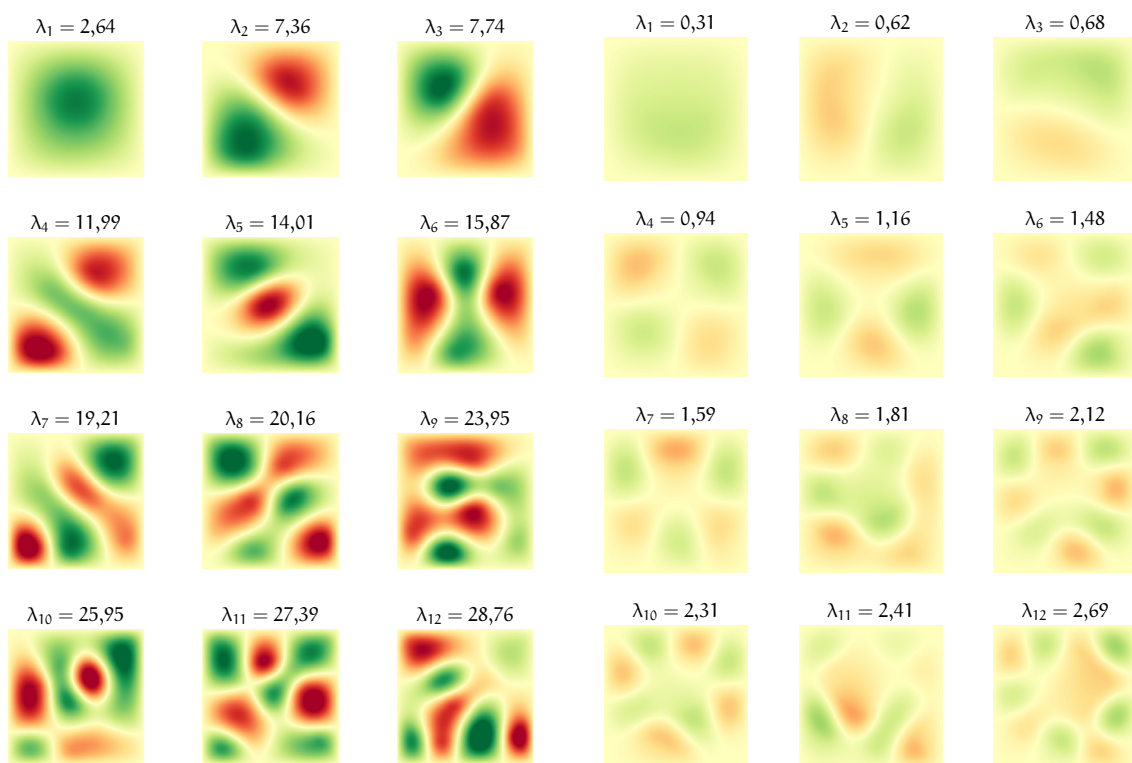
Na slikah 4 in 5 je prikazanih prvih 12 lastnih načinov za homogeno in nehomogeno domeno pri treh različnih gostotah. Opazimo, da nihajni načini homogene domene vsebujejo več značilnih simetrijskih osi, medtem ko se pri nehomogeni domeni simetrija zlomi.



Slika 3: Prvih 25 lastnih vrednosti λ_n v odvisnosti od gostote poligona ρ . Rdeči krožci označujejo homogen kvadrat ($\rho = 1$), črtkane rdeče črtice pa analitične lastne vrednosti za homogeno domeno.



Slika 4: Prvih 12 lastnih načinov za homogeno domeno (levo) in nehomogeno domeno z gostoto $\rho = 2$.



Slika 5: Prvih 12 lastnih načinov za nehomogeno domeno z gostoto $\rho = 1/2$ (levo) in $\rho = 10$ (desno).