

Navadne diferencialne enačbe: robni problemi

2. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Robni problemi

Rešujemo diferencialno enačbo, za katero imamo podane (mešane) robne pogoje:

$$\begin{aligned}y'' &= f(x, y, y'), \\ \alpha_0 y(a) - \alpha_1 y'(a) &= \alpha, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= \beta.\end{aligned}$$

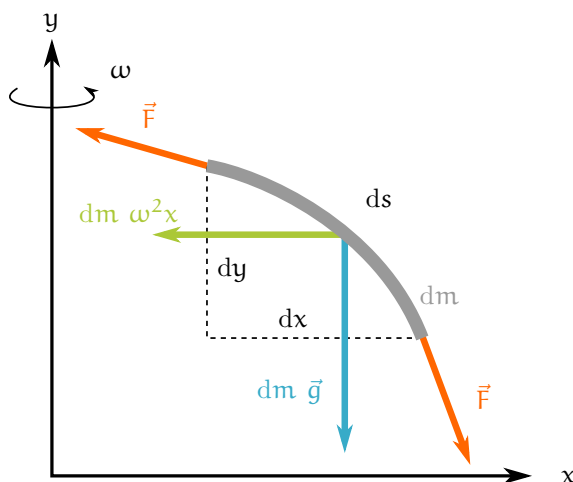
V splošnem lahko metode reševanja robnih problemov razdelimo v dve skupini: *strelske metode* in *relaksacijske metode*. Strelske metode temeljijo na metodah reševanja začetnih problemov, tako da s preskušanjem različnih začetnih vrednosti na eni strani intervala poskusimo zadeti želeno robno točko na drugi strani intervala. Pri relaksacijskih metodah diferencialno enačbo zapišemo s sistemom končnih diferenc, nato uganemo približno rešitev in jo iterativno izboljšujemo, tako da rešujemo sklopljeni sistem nelinearnih enačb. Pri izbiri metode se držimo izjave W. H. Pressa, enega izmed avtorjev znanih *Numerical Recipes*: "shoot first and relax later". Strelsko metodo je sicer lažje implementirati in je primerna za nelinearne robne probleme, medtem ko so relaksacijske metode primernejše za reševanje enačb v več dimenzijah.

2 Vrteča se vrv

Vrv obesimo v dve točki na vrtečo se navpično os. Za vsak košček vrvi z maso dm zapišemo ravnovesje sile v smeri x in v smeri y , kot kaže slika 1:

$$\begin{aligned}dm \ddot{x} &= F \frac{dx}{ds} + dm \omega^2 x \\ dm \ddot{y} &= F \frac{dy}{ds} - dm g\end{aligned}$$

Obe strani delimo z ds in uvedemo dolžinsko gostoto $\rho = \frac{dm}{ds}$. Pridelamo enačbi:



Slika 1: Sile, ki delujejo na kratek košček vrvi z maso dm dolžine ds .

$$\begin{aligned}\rho \ddot{x} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{dx}{ds} \right) + \rho \omega^2 x \\ \rho \ddot{y} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{dy}{ds} \right) - \rho g\end{aligned}$$

velja pa še $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$.

Uvedimo nekaj substitucij, in sicer $s \rightarrow s/l, x \rightarrow x/l, y \rightarrow y/l, F \rightarrow F/\rho g l, dx/ds = \cos \alpha, dy/ds = \sin \alpha$ in $\beta = \omega^2 l/g$ ter oznako $' = \partial/\partial s$. S tem dobimo sistem štirih navadnih diferencialnih enačb prvega reda za F, α, x, y :

$$\begin{aligned}F' &= -\beta x \cos \alpha + \sin \alpha, \\ \alpha' &= \frac{1}{F} (\beta x \sin \alpha + \cos \alpha), \\ x' &= \cos \alpha, \\ y' &= \sin \alpha.\end{aligned}$$

Poznamo zgolj položaj obeh pritrdišč, torej $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ in $(x(1), y(1)) = (0, y_L)$.

2.1 Reševanje problema

Problem sem reševal z metodo `scipy.integrate.solve_ivp` in določeno relativno natančnostjo `rtol = 10-6` ter metodo `scipy.optimize.root` z določeno natančnostjo `tol = 10-5`.

2.2 Vpliv parametrov β in y_L

Sprva sem si ogledal vpliv hitrosti vrtenja (β) na dobljeno rešitev. Pri tem sem za začetne približke robnih pogojev izbral $\alpha_0^* = -0,1$ in $F_0^* = 100$. Rezultati so prikazani na sliki 2. Pri obravnavi rešitev sem definiriral tri količine:

$$\begin{aligned}\xi &= \text{število presečišč z osjo } y, \\ \Delta &= |1 - L| = |1 - \sum_i s_i|, \\ \sigma &= \sum_i (x_i - \tilde{x}_i)^2.\end{aligned}$$

Količina Δ meri odstopanje dolžine vrvi L od zahtevane dolžine 1, količina σ pa meri nesimetričnost vrvi v navpični smeri, torej odstopanje presečišč vrvi od enakomerno porazdeljenih presečišč $\tilde{x}_i = i y_L / (\xi + 2)$.

Opazimo zanimivo periodično strukturo: pri povečevanju hitrosti vrtenja se napetost v vrvi in kot povečujeta do neke mejne vrednosti, nato pa nenadoma upadeta in pojavi se rešitev z dodatnim presečiščem. Napaka dolžine ter asimetrija rešitev naraščata s povečevanjem hitrosti vrtenja.

Nadalje sem preveril še vpliv položaja spodnjega pritrdišča vrvi y_L , rezultati so prikazani na sliki 3. Zanimivo je opaziti, da pri izbranem β položaj pritrdišča praktično ne vpliva na obliko vrvi (ξ in α_0), nekoliko pa vpliva na silo v pritrdišču (F_0). V grafu s prikazano silo opazimo tudi enako periodično pojavljanje vrhov kot na sliki 2, dodatno pa je vidno še, da z dvigovanjem pritrdišča narašča sila v vrvi.

2.3 Odvisnost od začetnega približka

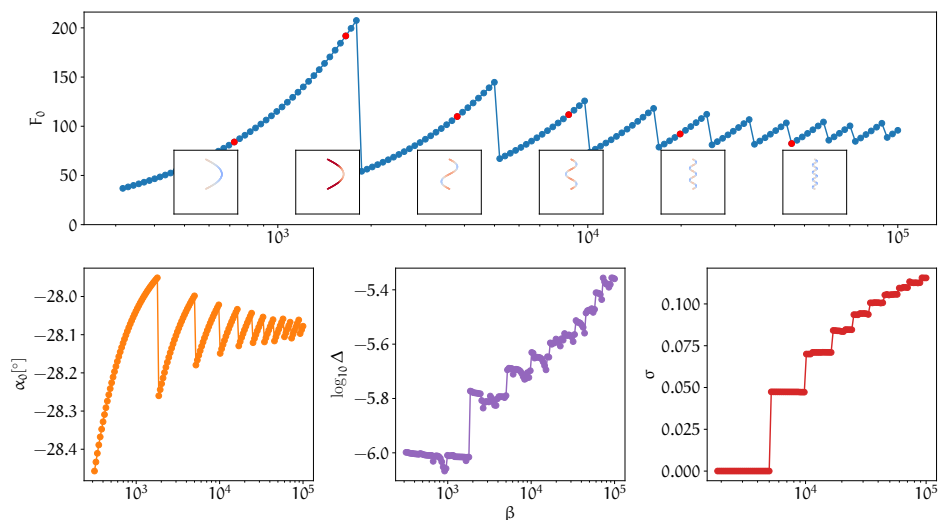
Medtem ko pri začetnih problemih (IVP) dobro poznamo pogoje za obsoj in enoličnost rešitve, pa je enoličnost rešitve pri robnih problemih (BVP) veliko bolj zapletena in je še danes pomemben del matematičnega raziskovanja. Vzemimo kar najenostavnejši primer:

$$y''(x) = -y(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

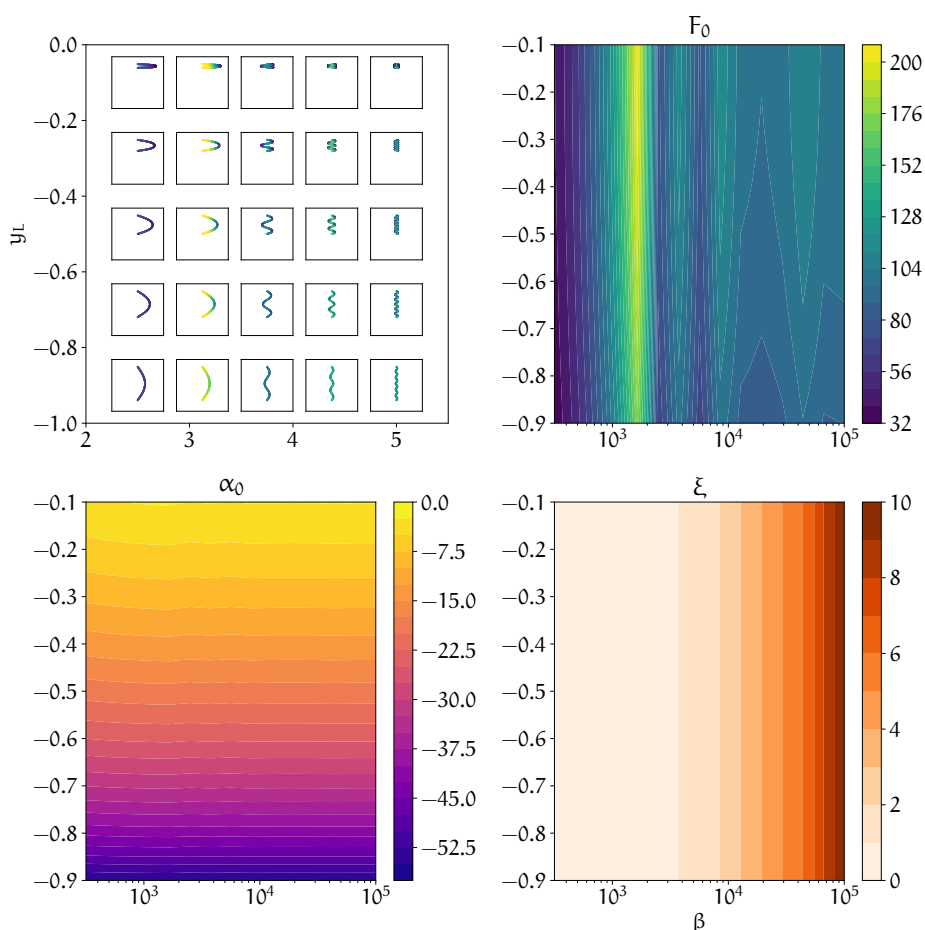
Lastni vrednosti sta $\pm i$, splošna rešitev pa torej oblike

$$y(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Z uporabo levega robnega pogoja določimo $A = 0$, desni robni pogoj, $y(\pi) = B \sin \pi = 0$, pa ne more enolično določiti rešitve. Zgornji problem ima torej neskončno množico rešitev.



Slika 2: Vpliv hitrosti vrtenja (β) na obliko vrvi. Prikazana je napetost v zgornjem koncu vrvi, F_0 , začetni kot α_0 , napaka dolžine Δ ter razpršenost presečišč vrvi σ . Z rdečimi točkami so označeni parametri prikazanih oblik vrvi na manjših sličicah. Vrv je obarvana glede na silo v dani točki vrvi.

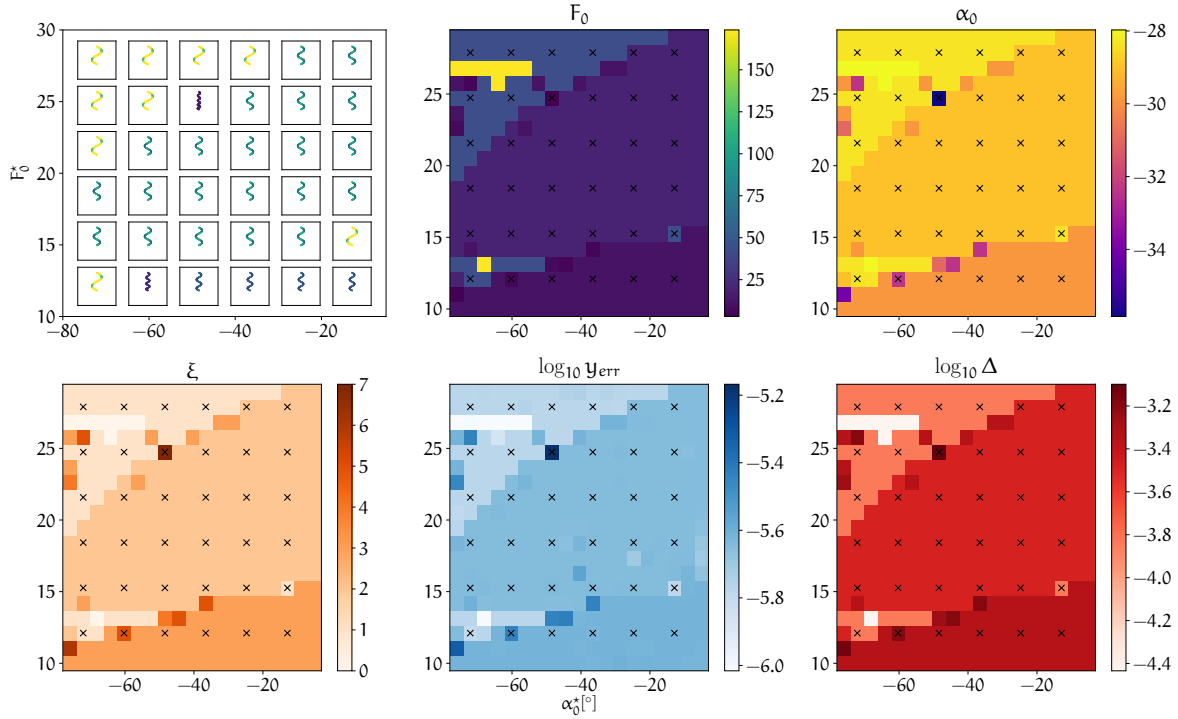


Slika 3: Vpliv β in y_L na mnogoterost rešitev. Položaj pritrdišča ne igra vloge pri obliki vrvi, temveč vpliva le na silo.

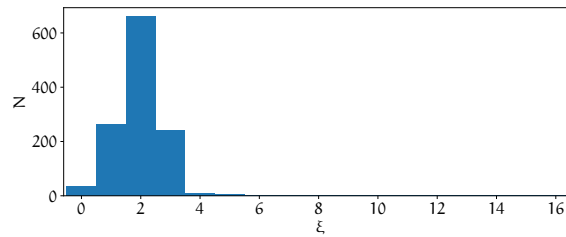
Tudi pri našem reševanju problema vrteče vrvi rešitev ni enolično določena, temveč zavisi od začetnih

pogojev, s katerimi poženemo strelsko metodo. Na grafu 4 je prikazano reševanje problema za $y_L = 0,65$ in $\beta = 1500$ pri različnih začetnih približkih za silo in kot na mreži 20×20 . Na še gostejši mreži, 35×35 , je bilo nato najdenih 12 različnih oblik vrvi, ki so podrobneje prikazane na slikah 6 in 7.

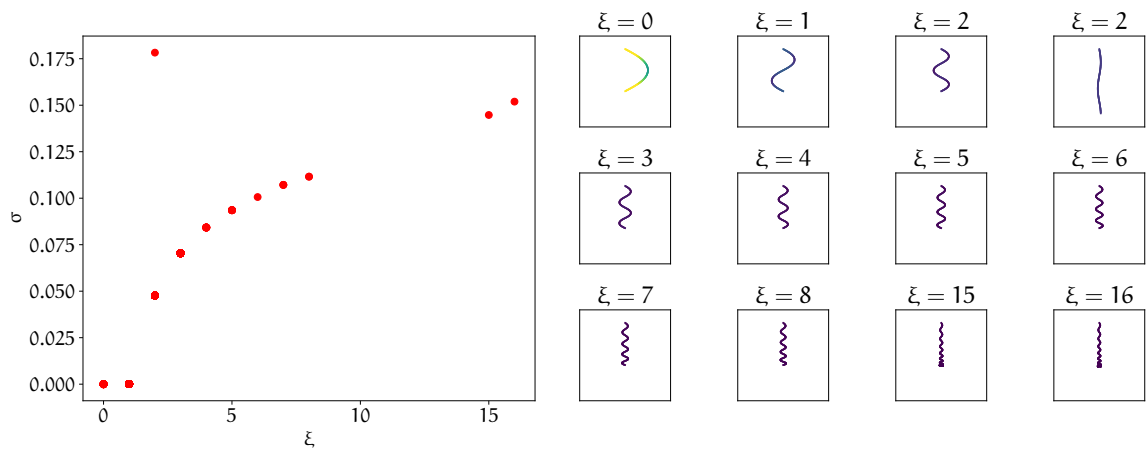
Opazimo lahko, da obstajajo večja področja, kjer prevladuje ena rešitev, na mejah med temi območji pa se pojavljajo otočki z drugačnimi rešitvami. Največ rešitev je bilo najdenih s $\xi = 2$ ter $\xi = 3$ in $\xi = 4$, vse ostale rešitve pa so bile znatno manj pogoste. Rešitve z visokim ξ so tudi vedno bolj nesimetrične (visok σ), tako da presečišča niso enakomerno porazdeljena, temveč se posedajo in zgoščajo na spodnjem delu vrvi.



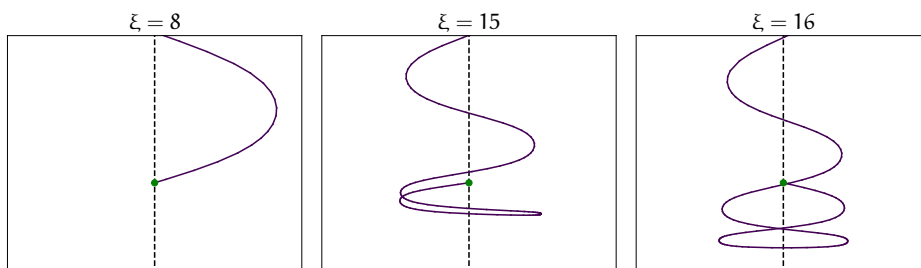
Slika 4: Mnogoterost rešitev za $y_L = 0,65$ in $\beta = 1500$, ki dependijo od začetnih približkov za kot, α_0^* , in silo, F_0^* . S križci so označena mesta, za katera je prikazana oblika vrvi na prvem grafu. Prikazanih je 20×20 različnih začetnih pogojev.



Slika 5: Pojavnost različnih oblik vrvi pri različnih začetnih pogojih.



Slika 6: Najdenih 12 različnih oblik vrvi za $y_L = 0,65$ in $\beta = 1500$. Opazimo, da ena izmed oblik ($\xi = 2, \sigma \approx 0,175$) ne zadošča robnemu pogoju.



Slika 7: Približan pogled na spodnje pritrdišče pri treh različnih oblikah vrvi. Smiselno rešitev s $\xi = 15$ in $\xi = 16$ je vprašljiva, saj vrv seka samo sebe.

3 Hénon-Heilesov potencial

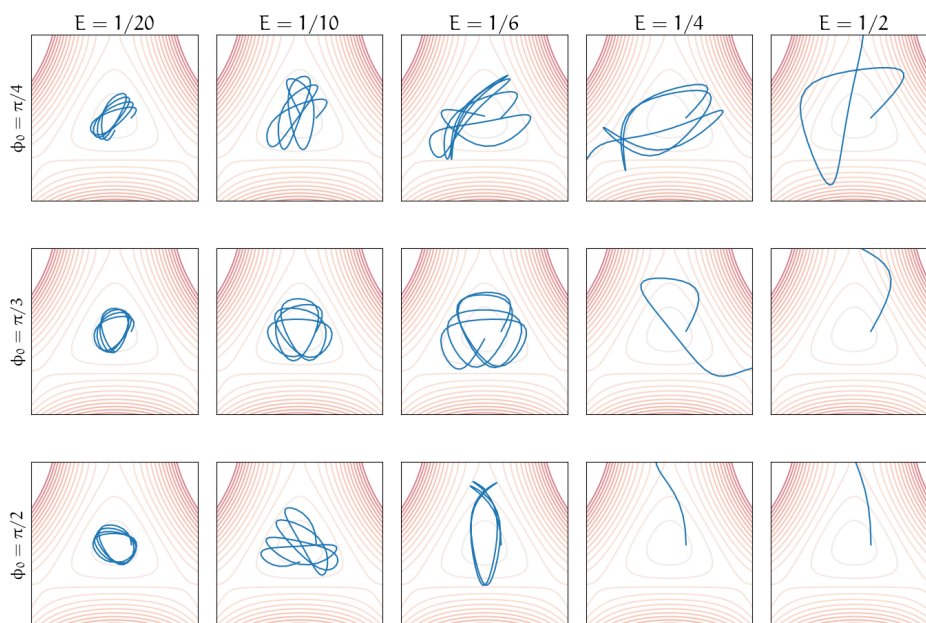
Obravnavamo gibanje delca v potencialu oblike:

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

Zapišimo nabor gibalnih enačb in začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= v & y(0) &= 0 \\ \dot{u} &= -x - 2xy & u(0) &= v_{x,0} \\ \dot{v} &= -y - x^2 + y^2 & v(0) &= v_{y,0} \end{aligned}$$

Oglejmo si za začetek nekaj trajektorij na sliki 8. Opazimo, da je gibanje zelo neregularnih oblik, pri energijah $E > 1/6$ pa delec zbeži.

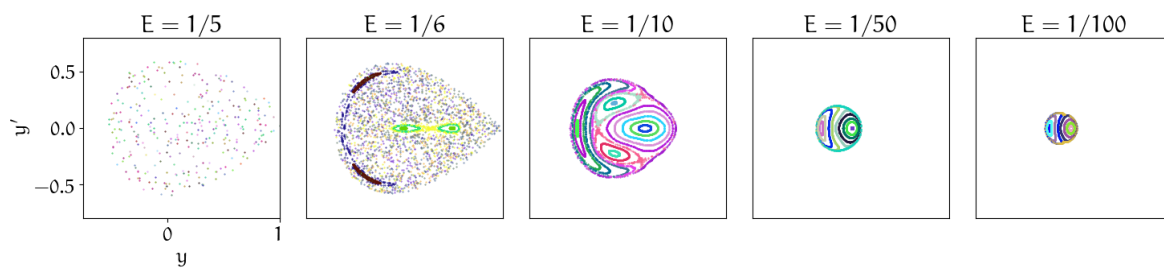


Slika 8: Nekaj trajektorij v Hénon-Heilesovem potencialu pri različnih energijah in začetnih pogojih. Pri $E > 1/6$ postanejo trajektorije neomejene.

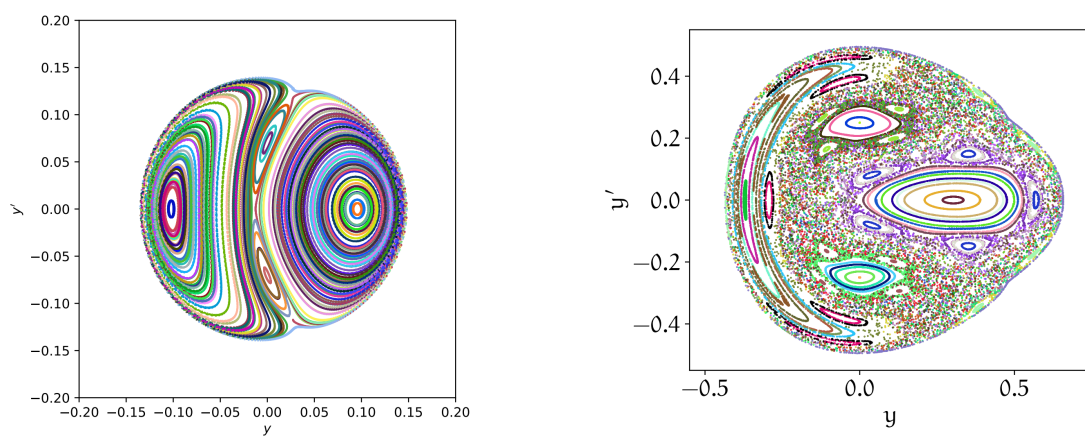
Zanima nas, ali obstajajo periodične orbite. Te bomo najlažje našli tako, da si ogledamo Poincaréjeve ploskve $y-y'$ pri $x = 0$. Na sliki 9 so prikazane poenostavljene (zgolj nekaj začetnih pogojev) P. ploskve za 5 različnih energij. Opazimo, da se fazni prostor s povečevanjem energije zmanjšuje ter se iz kapljičaste oblike spreminja v diskasto. Pomemben je prehod okoli $E \approx 1/6$: pri večjih energijah namreč postane gibanje v celoti kaotično, P. ploskev pa zaradi tega neredko posejana.

Oglejmo si še bolj podrobne P. ploskve na slikah 10 in 11. Najpestrejšje dogajanje opazimo pri $E = 1/8$, kjer se pojavljajo območja kaotičnega gibanja, med katerimi ležijo periodične orbite s periodo 1, ki jih obdajajo orbite z višjimi periodami.

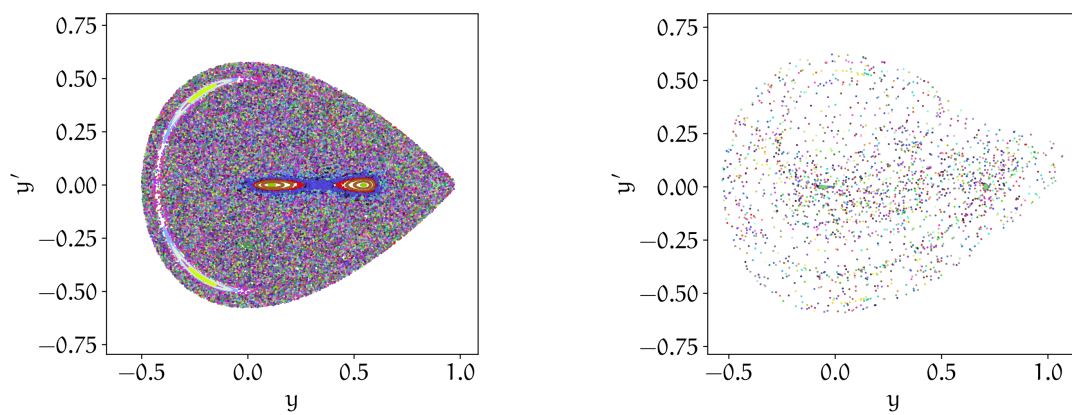
Za konec si oglejmo še nekaj pripadajočih periodičnih orbit, ki so prikazane na slikah 12 in 13. Z N sem označil obhodno število, vendar v določenih primerih to število ni ustrezno izračunano.



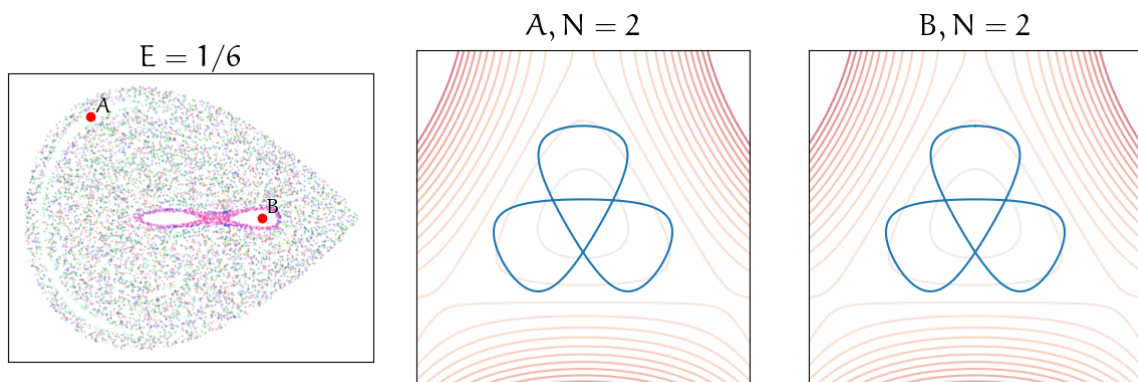
Slika 9: Poenostavljene Poincaréjeve ploskve za različne energije.



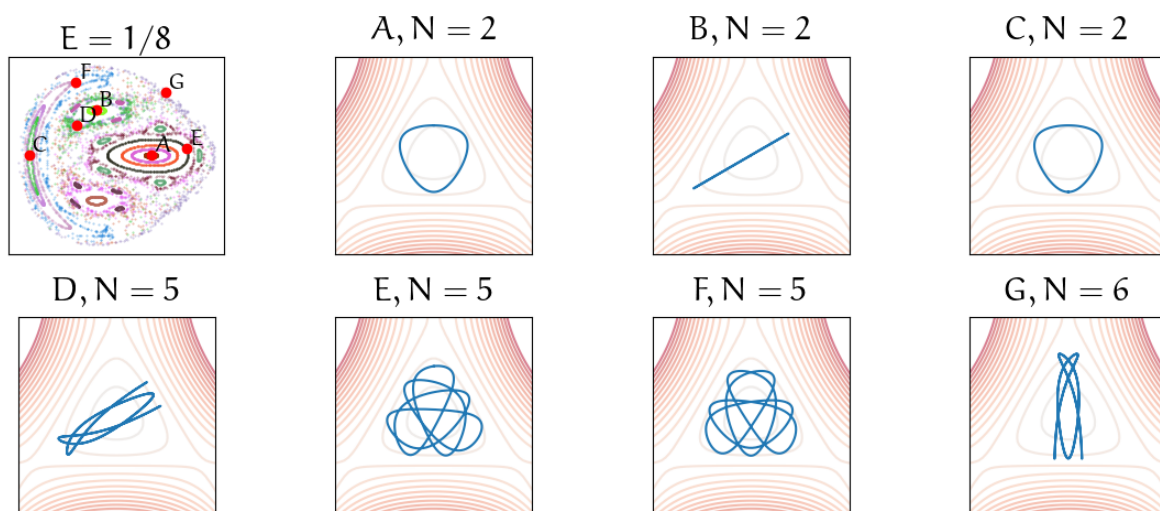
Slika 10: Poincaréjeva ploskev pri $E = 1/100$ (levo) in $E = 1/8$ (desno).



Slika 11: Poincaréjeva ploskev pri $E = 1/6$ (levo) in $E = 1/5$ (desno).



Slika 12: Periodični orbiti pri $E = 1/6$.



Slika 13: Periodične orbite pri $E = 1/8$