

Navadne diferencialne enačbe

1. domača naloga pri predmetu Modelska analiza II

Domen Vaupotič

1 Navadne diferencialne enačbe

Navadne diferencialne enačbe so pomembno orodje pri opisovanju najrazličnejših naravnih pojavov. Najpogostejše se srečujemo z enačbami, ki vsebujejo *časovne odvode* ($x \rightsquigarrow t$) ter *začetne pogoje*:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Če odvod ni odvisen od neodvisne spremenljivke, $y' = f(x)$, tedaj pravimo, da je sistem *avtonomen*, sicer pa je *neavtonomen*.

2 Reševanje navadnih diferencialnih enačb

2.1 Eksplicitne Eulerjeve metode

Definiramo ekvidistantno mrežo:

$$h = (b - a)/N = x_{n+1} - x_n, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Odvod aproksimiramo z linearnim členom:

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

in preuredimo člene, da (eksplicitno!) izrazimo vrednost pri koraku $n+1$ z vrednostmi pri koraku n :

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n = y_n + h f(x_n, y_n)$$

S primerjavo zgornjega izraza s Taylorjevim razvojem:

$$\exists \xi_n : y(x_n + h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_n)$$

vidimo, da je lokalna napaka Eulerjeve metode kvadratičnega reda:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \sim \mathcal{O}(h^2).$$

Pravimo, da je metoda *reda p*, če ima diferenčna shema lokalno napako reda h^{p+1} . V *izboljšani Eulerjevi metodi* uporabimo vrednost odvoda na sredini intervala; lokalna napaka je reda $\mathcal{O}(h^3)$. Pri *simetrizirani Eulerjevi metodi* uporabimo simetrično aproksimacijo odvoda:

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

in diferenčno shemo:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h y'_n$$

Na vsakem koraku moramo torej poznati *dve* predhodni vrednosti.

2.2 Eksplicitne metode Runge-Kutta

Metode RK so najbolj znane enokoračne metode. Podobno kot pri Eulerjevih metodah računamo rešitev v kratkih korakih dolžine h , vendar pri metodah RK desno stran diferencialne enačbe izračunamo v skrbno izbranih vmesnih točkah. Vrednost v naslednjem koraku je tako:

$$y_{n+1} = y_n + h F(h, x_n, y_n; f),$$

pri čemer je

$$F(h, x_n, y_n; f) = \sum_{i=1}^m b_i k_i$$

in m predstavlja število stopenj. Želimo seveda, da bo p , torej red metode, čim višji. Izbira $p = m = 1$ je ekvivalentna Eulerjevi metodi, naslednja enostavno rešljiva izbira pa je $p = m = 4$, ki jo običajno imenujemo s kratico RK4:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) \end{aligned}$$

Zanimivo je, da lahko red p dosežemo zgolj z vsaj p -stopenjsko metodo.

2.3 Gosti izpis

Z metodo RK4 dobimo vrednosti iskane funkcije v izbranih mrežnih točkah x_n , včasih pa potrebujemo tudi funkcijske vrednosti med mrežnimi točkami v $x^* \in [x_n, x_{n+1}]$ (ko želimo rešiti enačbo $g(x^*, y(x^*)) = 0$), npr. poiskati Poincaréjev prerez). To lahko dosežemo z gostim izpisom, ki zahteva dodatnih $(m^* - m)$ stopenj. Približek rešitve je tako:

$$y_{n+\theta} = y_n + h \sum_{i=1}^{m^*} b_i(\theta) k_i, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

pri čemer so $b_i(\theta)$ polinomi, ki zadoščajo $y_{n+\theta} - y(x_n + \theta h) = \mathcal{O}(h^{p^*+1})$. Za RK4 lahko izberemo kar $m^* = m$, s čimer nam ni treba računati dodatnih k_i . Dobimo:

$$b_1(\theta) = \theta - \frac{3}{2}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta^3, \quad b_2(\theta) = b_3(\theta) = \theta^2 - \frac{2}{3}\theta^3, \quad b_4(\theta) = -\frac{1}{2}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta^3.$$

Cena, ki jo plačamo za takšno interpolacijo, je zmanjšanje reda $p = 4$ na $p^* = 3$ za točke gostega izpisa.

2.4 Ohranitev invariant

Nekonstantno funkcijo $I(y)$ imenujemo *prvi integral* ali *invarianta* ali *konstanta gibanja*, če velja:

$$\nabla I(y) \cdot f(y) = 0 \quad \forall y.$$

V vsaki točki faznega prostora mora torej gradient $\nabla I(y)$ biti pravokoten na vektorsko polje $f(y)$. Pogosto si želimo, da bi integrator ohranjal vse invariante sistema.

V splošnem eksplicitne in implicitne metode RK ohranjajo zgolj linearne invariante (Hamiltonian je kvadratična invarianta).

3 Opis uporabljenih integratorjev

Za integriranje sem uporabil metodo `scipy.integrate.solve_ivp`, ki omogoča izbiro različnih integratorjev.

3.1 RK23 in RK45

Eksplicitni *embedded* metodi Runge-Kutta. Vsak korak ima m stopenj s čimer se izračuna približek p -tega reda:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i \mathbf{k}_i + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

in še eno kombinacijo za izračun približka $\hat{p}$ -tega reda:

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^m \hat{\mathbf{b}}_i \mathbf{k}_i + \mathcal{O}(h^{\hat{p}+1}).$$

Običajno je $\hat{p} = p \pm 1$. Kot približek za naslednji korak se lahko nato vzame $\mathbf{y}_{n+1}$ ali $\hat{\mathbf{y}}_{n+1}$. Lokalna napaka je ocenjena kot:

$$\Delta = \mathbf{y}_{n+1} - \hat{\mathbf{y}}_{n+1}.$$

RK23 uporablja formule Bogacki-Shampine in je reda 2(3), RK45 pa formule Dormand-Price in je reda 4(5).

3.2 DOP853

Eksplicitna metoda Runge-Kutta s formulami Dormand-Price reda 8(5,3).

3.3 Radau

Implicitna enostopenjska metoda 5. reda iz družine Radau IIA.

3.4 BDF

Metoda obratnih končnih diferenc (*backward differentiation formula*), pri kateri aproksimiramo odvod s končnimi diferencami. Primer BDF 1. reda je obratna Eulerjeva metoda:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h f(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}).$$

Opazimo, da je metoda *implicitna*, saj se $\mathbf{y}_{n+1}$ pojavi na obeh straneh enačbe. Implementacija je takšna, da samodejno prilagaja red metode od 1 do 5.

3.5 Verlet

Implementiral sem tudi Verletov algoritem, ki je primer simplektičnega integratorja:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h \left(\mathbf{p}_n + \frac{h}{2} \nabla \Phi(\mathbf{q}_n) \right) \\ \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}_n + \frac{h}{2} \nabla \Phi(\mathbf{q}_n) + \frac{h}{2} \nabla \Phi(\mathbf{q}_{n+1}) \end{aligned}$$

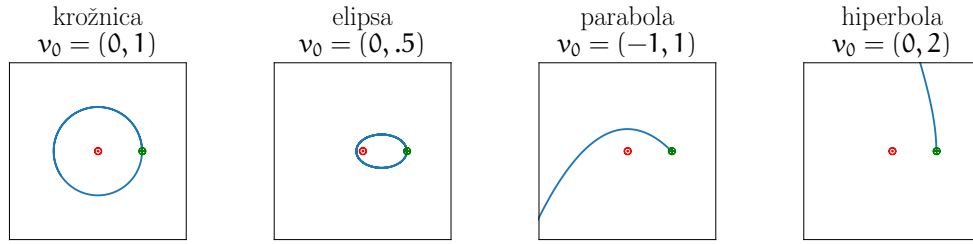
4 Keplerjev problem

Obravnavamo gibanje planeta (m) na tiru okrog zvezde (M):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Poenostavimo konstante ($G = 1, M = 1, m = 1$). Gibanje je ravninsko, zato pišimo:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



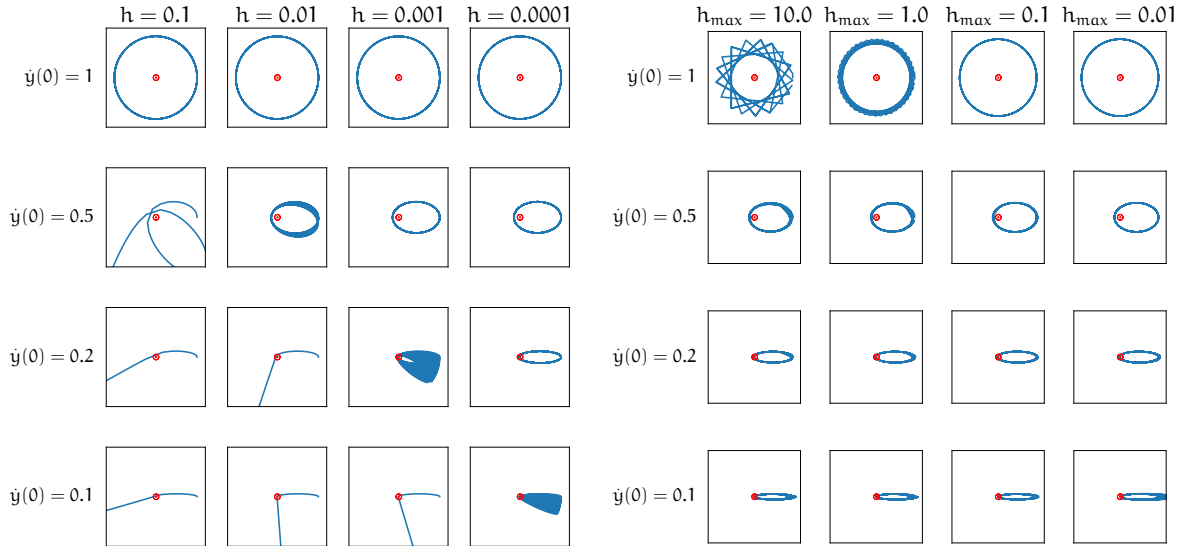
Slika 1: Tipični razredi Keplerskih tirnic.

4.1 Tirnice

Oglejmo si za začetek nekaj možnih trajektorij, ki dependijo od začetne hitrosti $|\mathbf{v}_0|$, in so prikazane na sliki 1. Razdelimo jih v štiri skupine po njihovi obliki: krožnica, elipsa, parabola in hiperbola. Krožnico in elipso lahko obravnavamo kot *vezani stanji*, parabolo in hiperbolo pa kot *nevezani stani*.

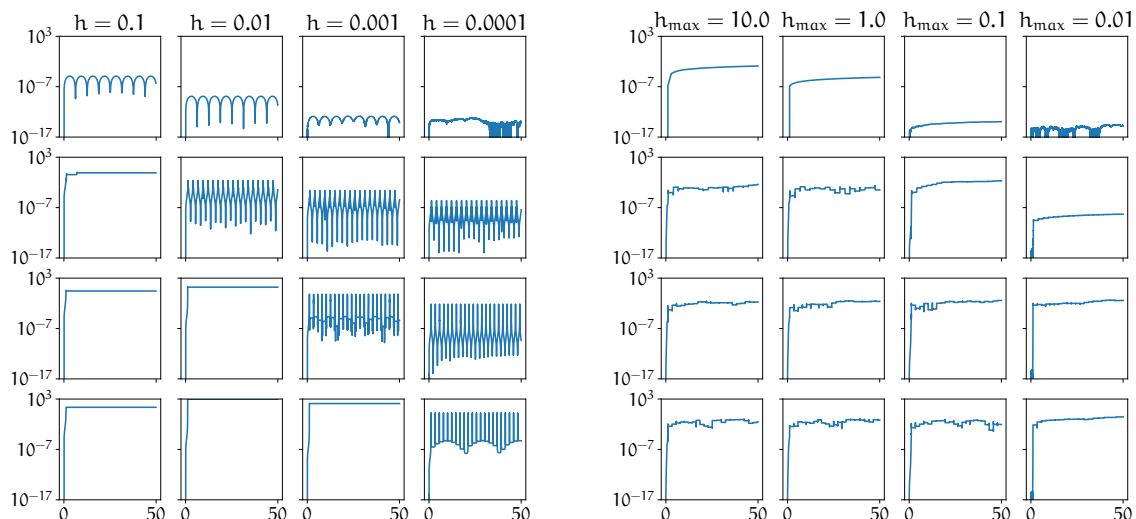
4.2 Stabilnost in natančnost metod

Ukvarjali se bomo predvsem z krožnimi in elipsastimi trajektorijami. Oglejmo si za začetek, kako velikost koraka integracije vpliva na izračunano trajektorijo. Na sliki 2 so prikazane trajektorije, izračunane z Verletovo integracijo in z metodo DOP853 pri različnih začetnih hitrostih. Opazimo, da krožne tirnice niso problematične, težave pa predstavljajo elipsaste tirnice. Če izberemo premajhen korak, bo pri Verletovi integraciji planet pobegnil ali pa se bo elipsasta tirnica začela vrteti okoli zvezde. Verletov algoritem ima konstanten korak integracije, ki je lahko v primeru elipsastih tirnic premajhen, ko se planet nahaja blizu zvezde in je potencial zelo velik. Opazimo, da metoda DOP853 teh težav nima, saj uporablja adaptivno prilagajanje velikosti koraka.



Slika 2: Trajektorije, izračunane z Verletovim algoritmom (levo) in DOP853 (desno) pri različnih začetnih hitrostih $\dot{y}(0)$ in različnih korakih h oz. največjih dovoljenih korakih $h_{\max}$.

Na sliki 3 so prikazani še časovni poteki energije za zgornje tirnice. Primerjajmo sedaj še vse metode med seboj, tako da spremljamo absolutno napako invariant, in sicer celotne energije, vrtilne količine in



Slika 3: Absolutna napaka Hamiltonijana, izračunane z Verletovim algoritmom (levo) in DOP853 (desno) pri različnih začetnih hitrostih $\dot{\mathbf{y}}(0)$ in različnih korakih h oz. največjih dovoljenih korakih $h_{\max}$.

velikosti Runge-Lenzovega vektorja:

$$H = T + V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$$

$$\Gamma = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = x\dot{y} - y\dot{x}$$

$$A = \left| \mathbf{r} \times \mathbf{l} - \frac{\mathbf{r}}{r} \right| = \sqrt{\left(ly - \frac{x}{r} \right)^2 + \left(-xl - \frac{y}{r} \right)^2}$$

Na sliki 4 je prikazana absolutna napaka invariant za krožno orbito, na sliki 5 pa za elipsasto ($v_0 = 0,2$). Na vsaki sliki je primerjava vseh metod brez omejitve maksimalnega koraka in z omejenim maksimalnim korakom ($h_{\max} = 1e-2$).

Pri krožni orbiti lahko opazimo, kako Verletov algoritem deluje kot simplektični integrator, saj zelo dobro ohranja vse invariante. Prav tako se je dobro odretal DOP853, medtem ko sta največjo napako pridelala BDF in RK23.

Zanimivo je, da je Verletov algoritem v primeru elipsaste tirnice slabo ohranjal celotno energijo, a vendarle zelo dobro ohranjal vrtilno količino. Opazimo tudi, da so napake, v celoti gledano, večje kot pri krožni orbiti. V splošnem se je ponovno najbolje izkazal DOP853, kar je pričakovano, saj je metoda najvišjega reda.

4.3 Natančnost obhodnega časa

Funkcija `solve_ivp` omogoča gosti izpis rezultatov integracije. Za krožno orbito sem pri različnih metodah poiskal zaporedne obhodne čase, tako da sem uporabil gosti izpis. Ničle sem poiskal z `scipy.optimize.root` oziroma z linearno interpolacijo za Verletovo metodo. Na sliki 6 je prikazano odstopanje časa zaporednega obhoda pri različnih metodah in pri dveh različnih maksimalnih korakih. Trend je primerjan s prileganjem potenčne funkcije $\Delta \sim N^\alpha$.

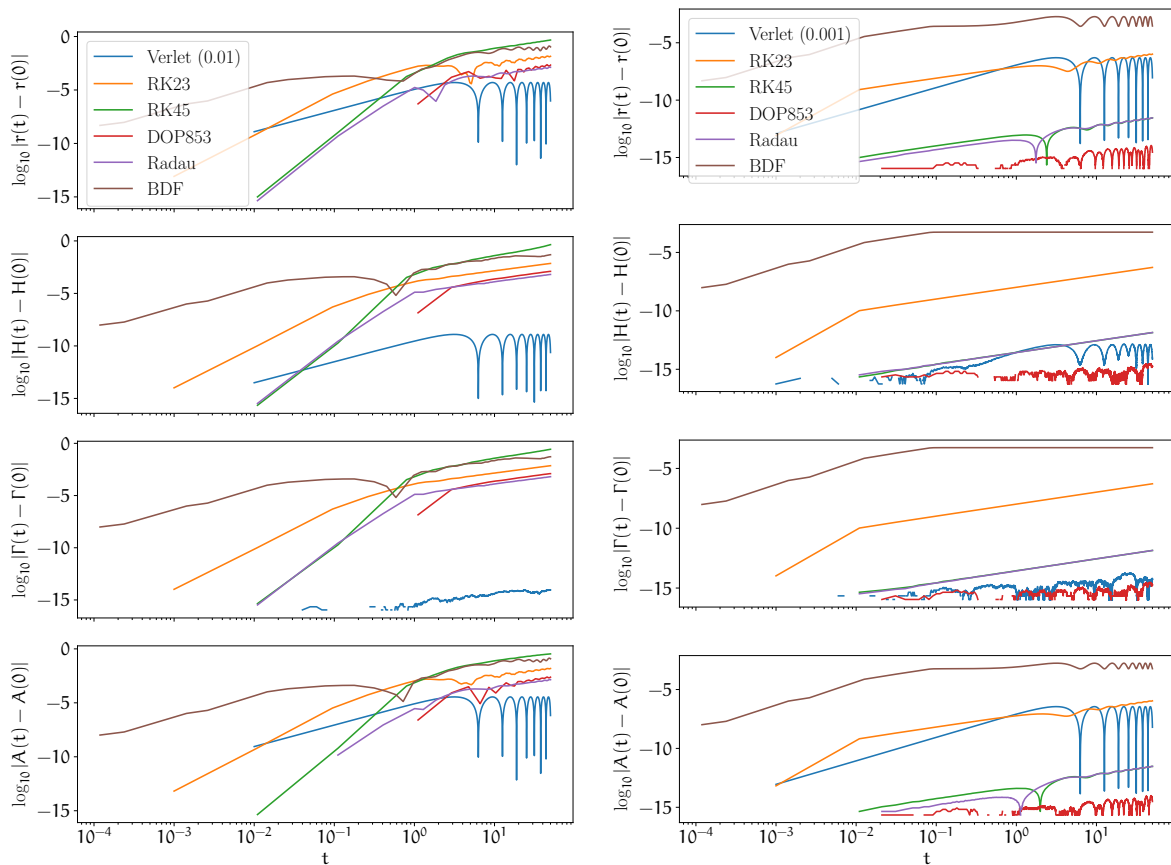
Oglejmo si še elipsaste orbite. Uporabimo enačbo *vis-viva* za izračun velike polosi ellipse iz začetne hitrosti:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = 2 - \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2 - v^2}$$

Iz Keplerjevega 3. zakona izračunamo še obhodni čas:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{a^3}$$

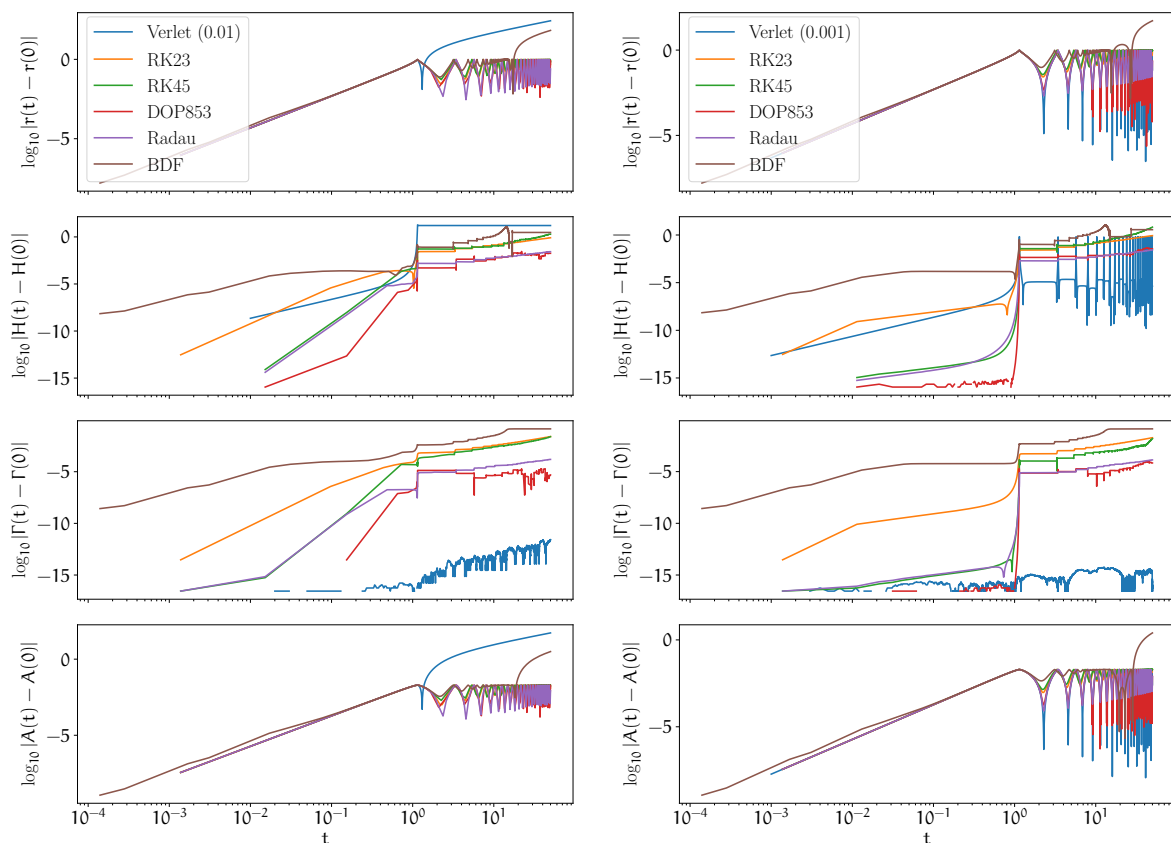
Na sliki 7 je prikazana stabilnost elipsaste orbite.



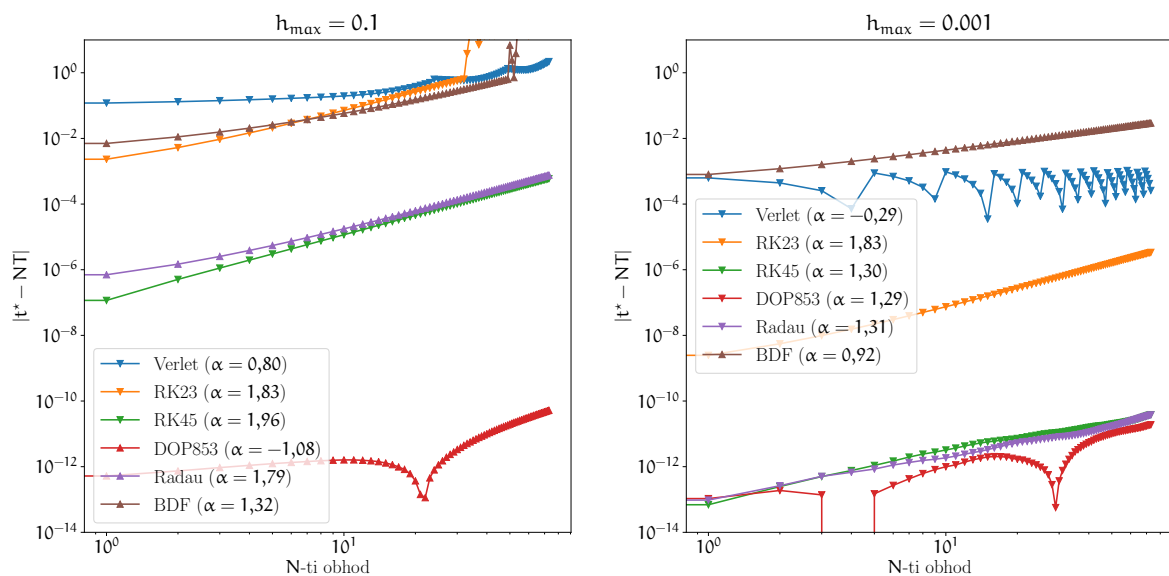
Slika 4: Ohranjanje invariant pri krožni orbiti.

4.4 Število klicev

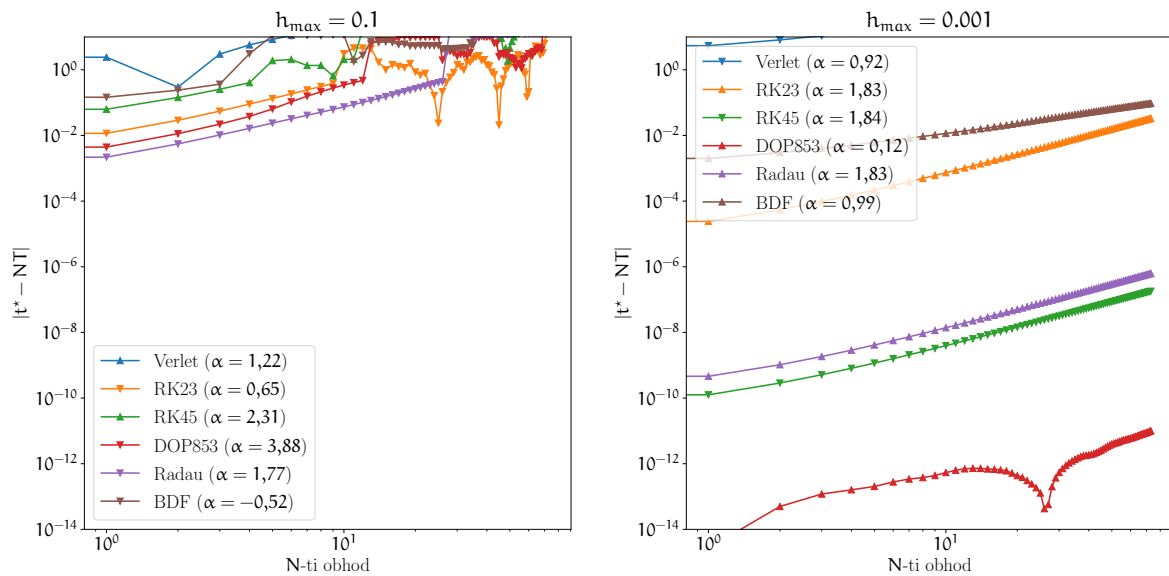
Smiselno si je ogledati še število klicev (izvrednotenj desnih strani diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$), ki jih opravijo metode. Tokrat sem primerjal število klicev (n_{fev}) pri različni relativni natančnosti ($rtol$), ki jo lahko podamo metodi. Rezultati so prikazani na sliki 8. Opazimo, da opravita metodi RK23 in Radau največ izvrednotenj, DOP853 in RK45 pa najmanj. Število klicev narašča potenčno z zahtevano relativno natančnostjo.



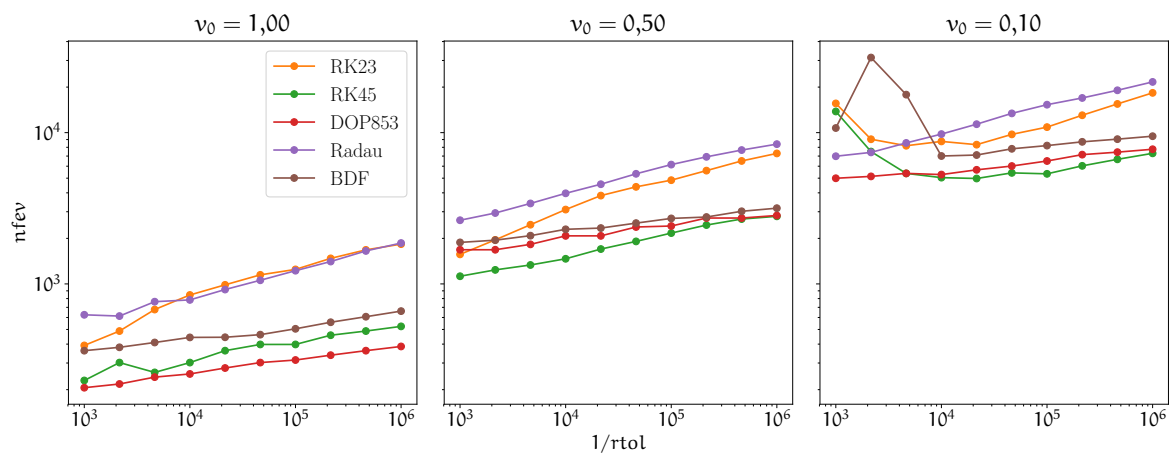
Slika 5: Ogranjanje invariant pri elipsasti orbiti.



Slika 6: Stabilnost krožne orbite pri dveh različnih maksimalnih korakih $h_{\max}$.



Slika 7: Stabilnost elipsaste orbite ($v_0 = 0,5$) pri dveh različnih maksimalnih korakih $h_{\max}$.



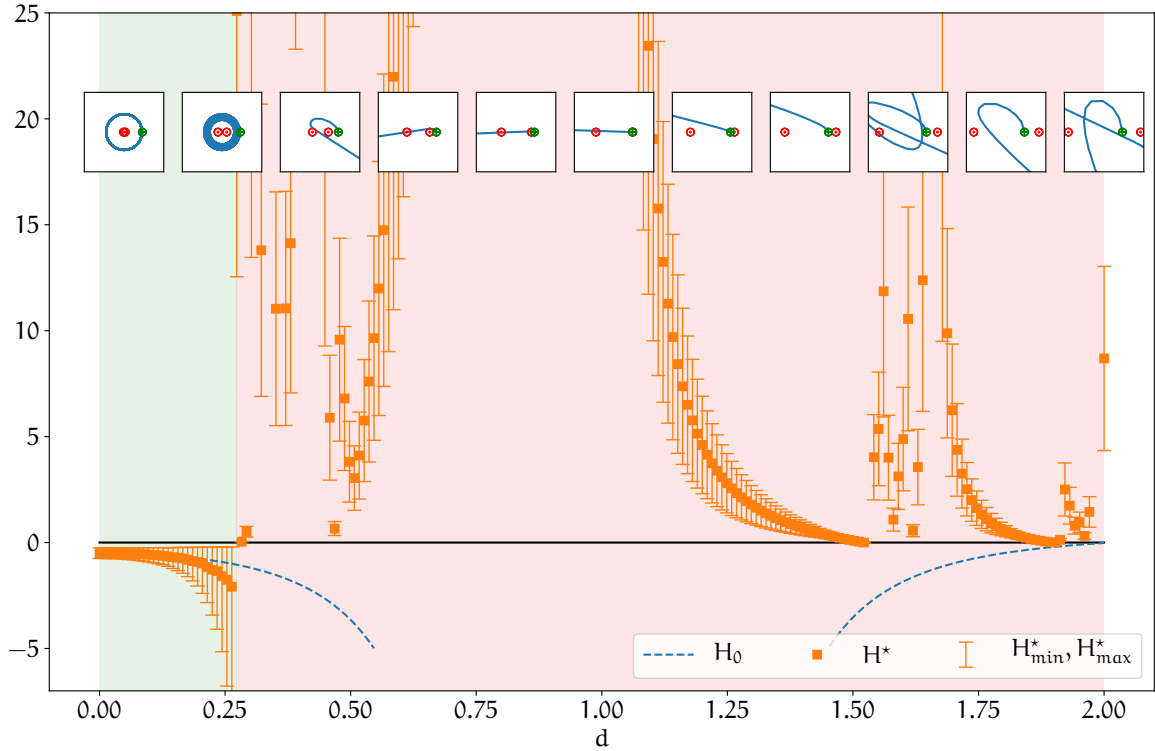
Slika 8: Število klicev funkcije

5 Binarni sistem in planet

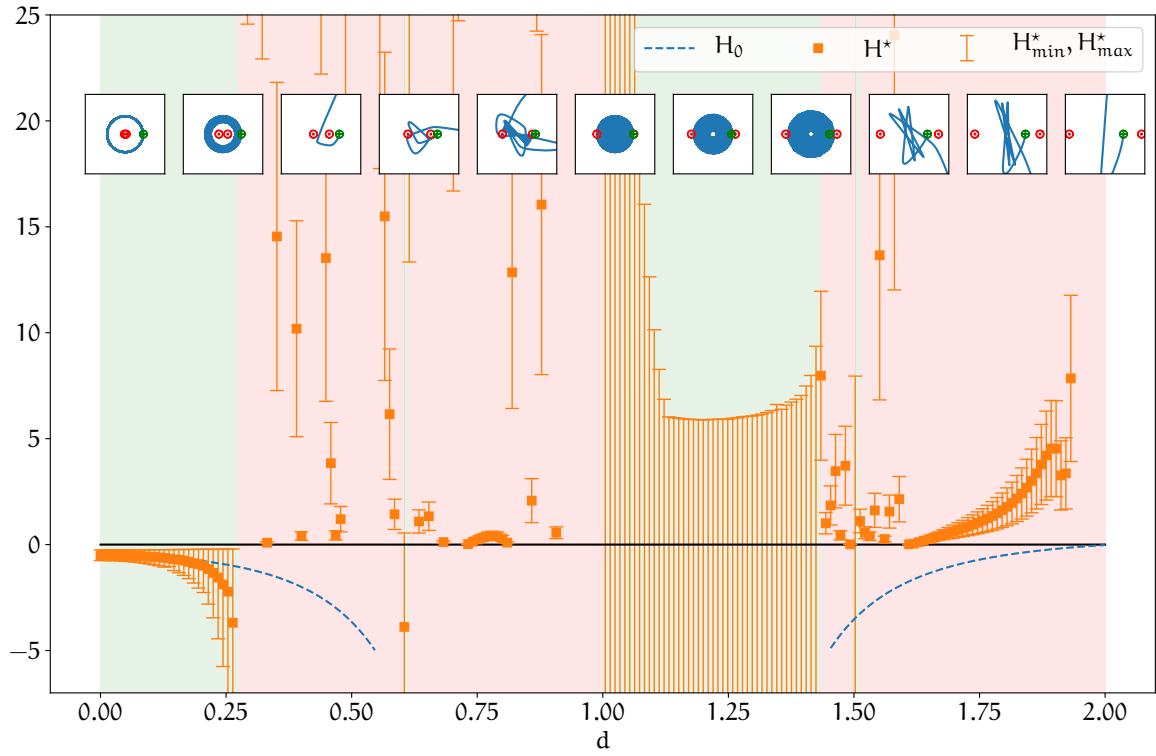
Obravnavajmo gibanje planeta v krožni orbiti okoli binarnega sistema zvezd, pri čemer ima vsaka zvezda maso $M/2$, med seboj pa sta oddaljeni za d . Začetna hitrost planeta je $v_0 = 1$, krožna frekvenca binarnega sistema pa $\omega = d^{-3/2}$.

Trajektorije sem izračunal to časa $t = 250$. Nato sem vzel zadnjih 20% časa in izračunal minimalno ($H_{\min}^*$), maksimalno ($H_{\max}^*$) in povprečno vrednost (H^*) energije planeta v tem času. Če je bila minimalna vrednost $H_{\min}^*$ pod 0, sem to obravnaval kot vezano končno stanje in obarval območje zeleno, sicer pa rdeče. Uporabil sem integrator DOP853 z relativno natančnostjo $\text{rtol} = 10^{-6}$.

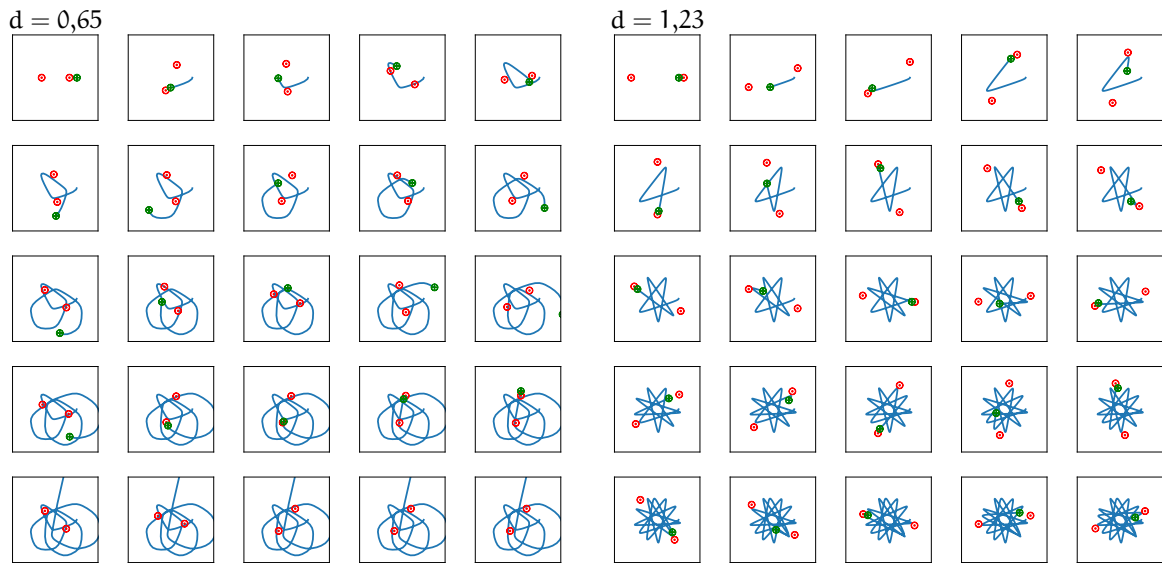
Opazimo, da vezano končno stanje nastopi le pri razdaljah do $d \approx 0,25$, pri kroženju v negativni smeri pa tudi na območju $1 \lesssim d \lesssim 1,4$. Na sliki 11 sta prikazana primera vezane in nevezane trajektorije.



Slika 9: Planet kroži v pozitivni smeri.



Slika 10: Planet kroži v negativni smeri.



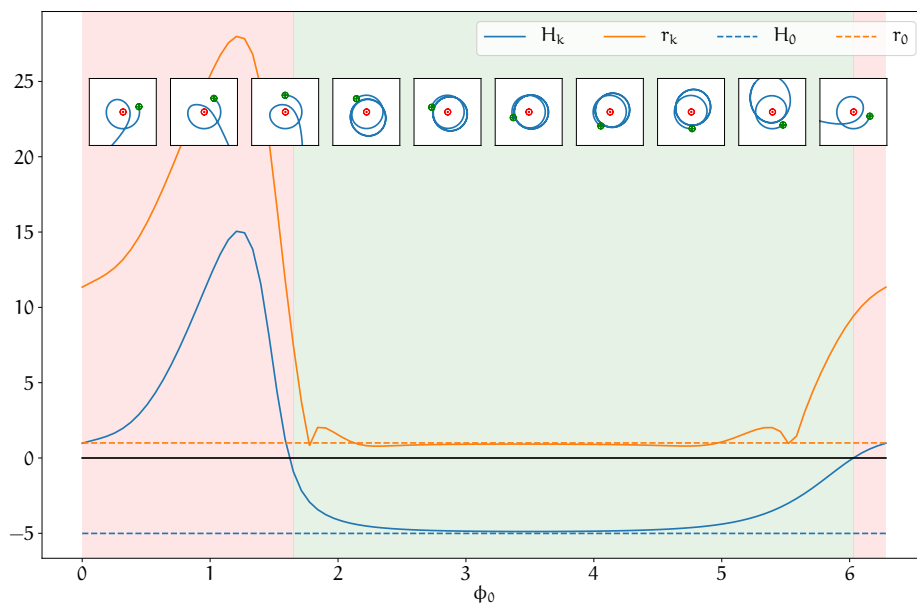
Slika 11: Nevezana (levo) in vezana (desno) trajektorija.

6 Planetni sistem in mimobežna zvezda

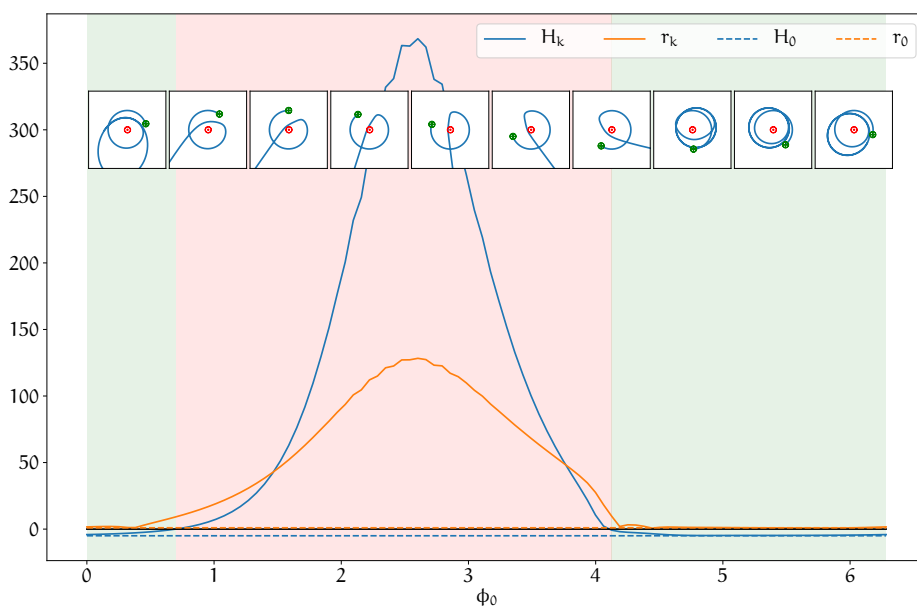
Obravnavajmo sedaj trk zvezde in planetarnega sistema. Mimobežna zvezda potuje po premici na oddaljenosti $y_z = 1,5$ s hitrostjo $v_z = 2v_m = \sqrt{M}$ od leve proti desni. Na slikah 12 in 13 je prikazan končni položaj planeta (r_k) in končna energija (H_k). Končno energijo sem klasificiral glede na predznak:

$\mathcal{H}_k < 0$: vezano stanje,

$\mathcal{H}_k > 0$: nevezano stanje,



Slika 12: Planet kroži v negativni smeri.



Slika 13: Planet kroži v pozitivni smeri.