

Nevronske mreže

13. domača naloga pri predmetu Modelska analiza I

Domen Vaupotič

1 Nevronske mreže

Umetne nevronske mreže so modeli za obdelavo informacij, ki po svoji strukturi in načinu delovanja posnemajo nevronske mreže živih bitij. V nalogi bomo obravnavali preprosto usmerjeno (*feed-forward*) nevronske mreže, pri katerih podatki potujejo samo v eno smer po mreži (ni povratnih zank) in je primerna za klasifikacijo vhodnih podatkov v razrede.

Mreža je sestavljena iz $L + 1$ plasti, tako da vsaka vsebuje N_l vozlišč, katerih vrednosti so zapisane v vektorju $\vec{y}^l$. Vhodne podatke pripeljemo v prvo plast ($\vec{y}^0$), izhodne podatke preberemo na zadnji plasti ($\vec{y}^L$). Med zaporednima plastema stoji nelinearna preslikava:

$$\vec{y}^{l+1} = f(W^l \vec{y}^l),$$

pri čemer je W^l utežna matrika dimenzije $N_{l+1} \times N_l$, funkcija f pa naraščajoča aktivacijska funkcija (logistična, skočna, hiperbolični tangens ...).

Izhod nevronske mreže pri danem vhodu primerjamo s pravilnim (želenim) izidom $\vec{t}$, tako da izračunamo napako:

$$E = \frac{1}{2} \|\vec{y}^L - \vec{t}\|^2.$$

2 Problem

Modelski problem predstavlja klasifikacija sličic, velikosti 28×28 px, ki prikazujejo ročno napisane številke 0 – 9. Nabor sličic se nahaja v bazi pod imenom MNIST (*Modified National Institute of Standards and Technology*) in vsebuje 60 000 sličic.

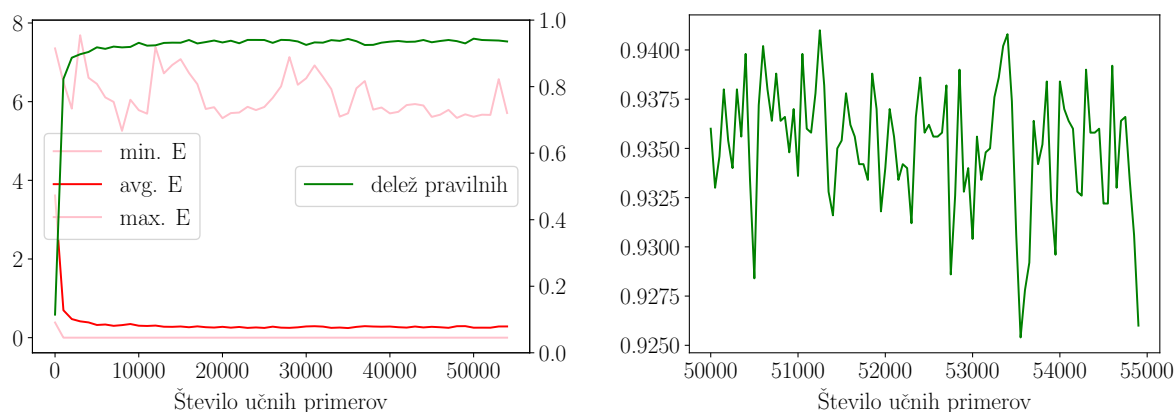
3 Učenje mreže

Nevronske mreže bomo izurili z nadzorovanim učenjem, pri katerem bomo mreži podajali učne primere, nato pa iz napake njene napovedi izračunali residue, s katerimi bomo rekurzivno popravili utežne matrike W^l na način, ki bo zmanjšal napako mreže. Celotno učenje tako podajajo tri formule:

$$\begin{aligned}\vec{\delta}^{L-1} &= -(\vec{y}^L - \vec{t}) \odot f'(W^{L-1} \vec{y}^{L-1}) \\ \vec{\delta}^l &= \vec{\delta}^{l+1} W^{l+1} \odot f'(W^l \vec{y}^l) \\ W^l &\mapsto W^l + \eta(\vec{\delta}^l \otimes \vec{y}^l),\end{aligned}$$

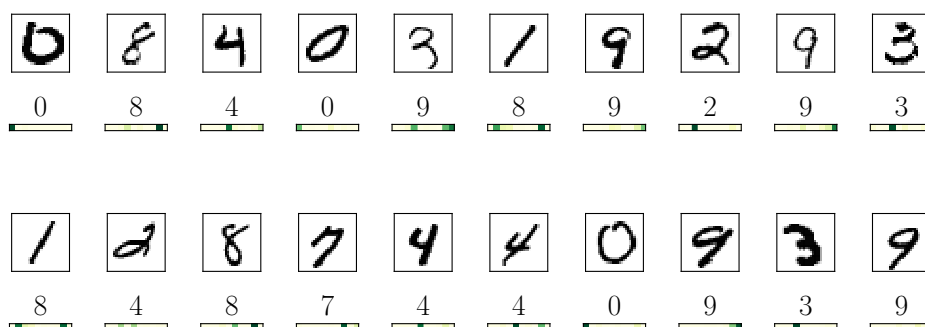
pri čemer smo uvedli še parameter učenja η , simbol $\odot$ pa predstavlja množenje po elementih.

Slika 3 prikazuje potek učenja, med katerim smo spremljali napredek tako, da smo na vsakih 1000 učnih primerov izvedli preverjanje mreže na 5000 testnih primerih. Prikazan je delež pravilno prepoznanih testnih primerov, ki že po 10000 učnih primerih doseže skorajšnji maksimum. Končni delež pravilnih je znašal 93,9 %. Pomembno je izpostaviti, da delež pravilnih *ni* strogo naraščajoča funkcija, saj tudi proti koncu učenja napaka zelo fluktuira, kar vidimo na grafu 2.



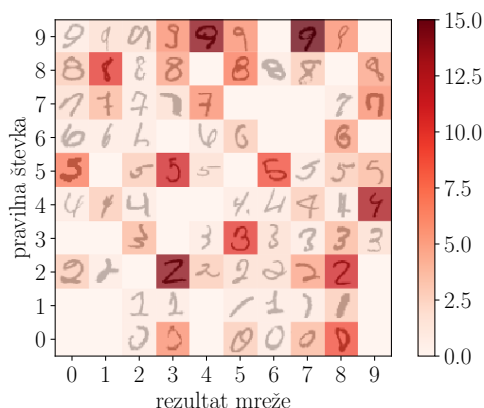
Slika 1: Napaka med učenjem nevronske mreže z $N = 55000$, $N_t = 5000$, $\eta = 0,01$. Slika 2: Napaka med učenjem nevronske mreže proti koncu učenja.

Na sliki 3 je prikazanih nekaj rezultatov nevronske mreže, izučene na 55000 učnih primerih. Vidimo, da so izmed prikazanih 20 primerov napačno klasificirani štirje. Dvakrat je mreža enico prepoznala kot osmico, kar je povsem zgrešeno. V drugih dveh primerih je zmota razumljivejša, saj je trojka spodaj prirezana, dvojka pa zapisana zelo površno. Navkljub napačni klasifikaciji, pa je pri vseh štirih primerih mreža tudi za pravilen rezultat podala zelo visoko verjetnost.



Slika 3: Primer rezultatov nevronske mreže z $N = 55000$, $\eta = 0,01$.

Oglejmo si še primere napačno klasificiranih števk. Na sliki 4 je prikazano število napačno klasificiranih števk (od skupaj $N_t = 5000$ testnih primerov).



Slika 4: Primeri napačno klasificiranih števk pri naučeni mreži.

Opazimo, da pogosto slabo prepozna devetico, ki jo zamenja za štirico ali sedmico.

4 Globoko sanjanje

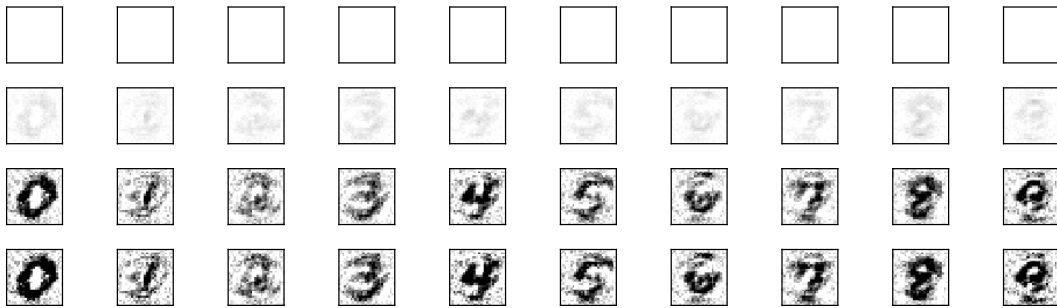
Iz naučene mreže lahko izluščimo njeno znanje tako, da pogledamo, kateri je tisti vhod, ki se bo najbolj približal nekemu želenemu izhodu. V našem primeru torej iščemo sličico števk, ki jih bo nevronska mreža karseda nedvoumno klasificirala.

Postopek je podoben učenju, le da tokrat ne popravljamo utežnih matrik W temveč zgolj plasti. Začnemo z ničelnim vhodom, ki ga nato večkrat popravimo po formuli:

$$\bar{y}^0 \mapsto \bar{y}^0 + \eta \delta^0 W^0,$$

pri čemer δ^0 izračunamo iterativno kot pri učenju mreže.

Na sliki 5 so prikazani rezultati sanjanja pri mreži, naučeni na 55000 učnih primerih. Za hitrejšo konvergenco je bila hitrost sanjanja povečana na $\eta = 0,1$. Števke so v splošno dobro opazne, slabše vidni sta enica in dvojka, predvsem zaradi različnega naklona pisave.



Slika 5: Primer nasanjanjih števk pri hitrosti učenja $\eta = 0,1$. Prikazano je začetno stanje (bela slika), nato pa rezultati sanjanja po 4000, 8000 in 12000 iteracijah.