

Populacijski modeli

4. domača naloga pri predmetu Modelska analiza I

Domen Vaupotič

1 Populacijski modeli

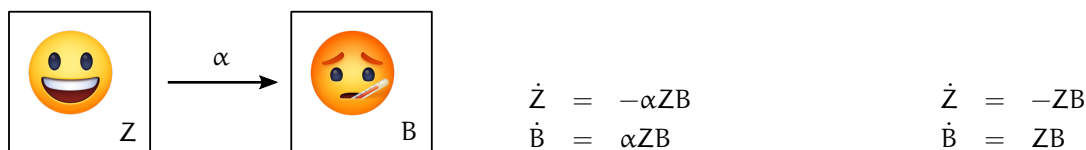
Populacijski modeli so matematični modeli, pri katerih obravnavo sicer diskretnih problemov prevedemo na reševanje diferencialnih enačb, znotraj katerih diskretne spremenljivke obravnavamo v zveznem približku.

2 Model epidemije

Model epidemije zgradimo na konstantno veliki populaciji ljudi, tako da celotno populacijo razdelimo na kompartmente in računamo s števili deleži glede na celotno populacijo.

2.1 Model ZB

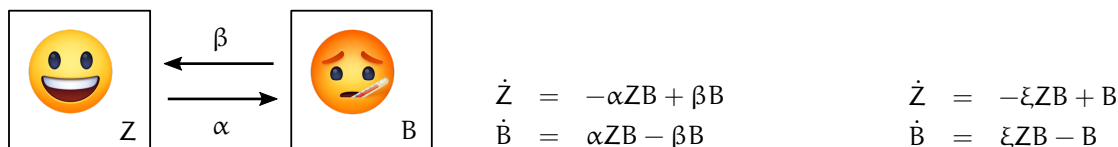
Najpreprostejši je dvokompartimentni model, pri katerem populacijo razdelimo na zdrave (Z) in bolne (B). Ko oseba zboli, ostane okužena in več ne ozdravi. Model lahko uporabimo za širjenje kroničnih virusnih okužb, kot je okužba se herpesom.



Uvedli smo brezdimenzionalizacijo $\tau = \alpha t$.

2.2 Model ZBZ

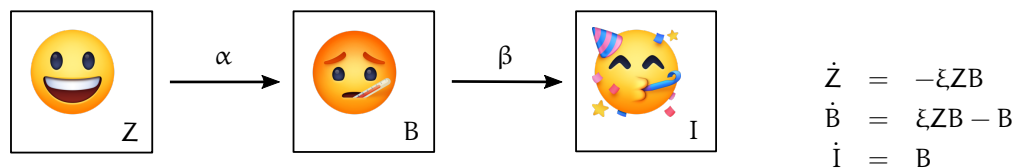
Model nadgradimo tako, da omogočimo ozdravitev. S tem modelom lahko modeliramo ponavljajoče se okužbe, kot so prehlad ali spolno prenosljive bolezni (gonoreja, klamidija).



Ponovno uvedemo $\tau = \alpha t$ in parametra združimo v enoten parameter $\xi = \alpha/\beta$, imenovan reprodukcijsko število. Ta parameter opisuje, kako hitro se bolezen širi in določa tip končnega stacionarnega stanja.

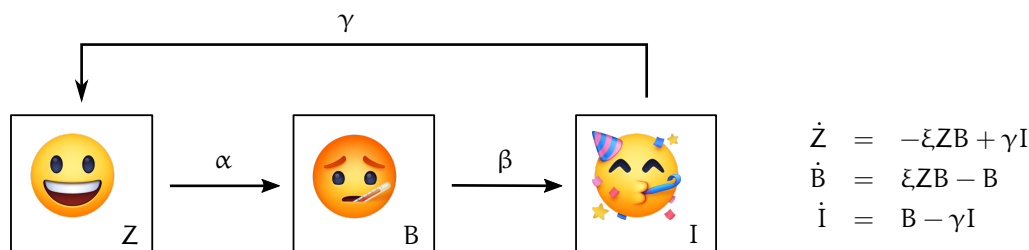
2.3 Model ZBI

K modelu sedaj dodamo še en kompartment, in sicer imune osebe. Z modelom lahko opišemo bolezni, ki po okužbi vodijo k doživljenjski imunosti, kot so rdečke, mumps ali ošpice.



2.4 Model ZBIZ

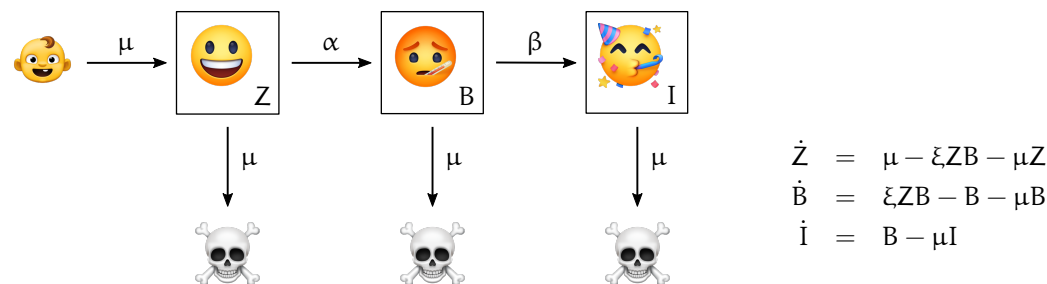
Po preboletju določenih bolezni je lahko imunost le začasna. Na ta način dodamo še prehajanje imunih oseb v populacijo zdravih.



Slika 1: Model ZBIZ.

2.5 Upoštevanje rojstev in smrti

Čeprav zgornji modeli upoštevajo konstantno populacijo ($\dot{N} = \dot{Z} + \dot{B} + \dot{I} = 0$), lahko k modelom dodamo še prispevke zaradi rojstev in smrti, a pri tem še vedno ohranimo konstantno populacijo. To je možno, če izenačimo hitrostni konstanti rasti in smrti $\mu_{\text{rojstva}} = \mu_{\text{smrti}} = \mu$.



Slika 2: Model ZBI z upoštevanjem rojstev in smrti.

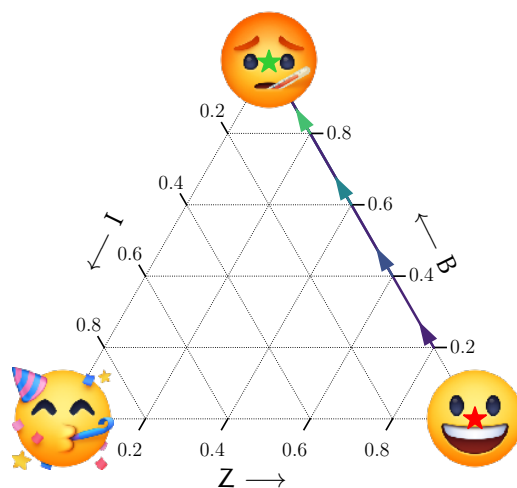
2.6 Rezultati modelov

Ker so v modelih obravnavani zgolj deleži v posameznih kompartmentih in mora torej vedno veljati $Z + B + I = 1$, je fazni diagram najprikladneje prikazovati s trojnim faznim diagramom.

Na diagramih so z različnimi barvami prikazane trajektorije pri različnih začetnih pogojih. Z rdečo zvezdico (*) je prikazana nestabilna in z zeleno zvezdico (★) stabilna fiksna točka.

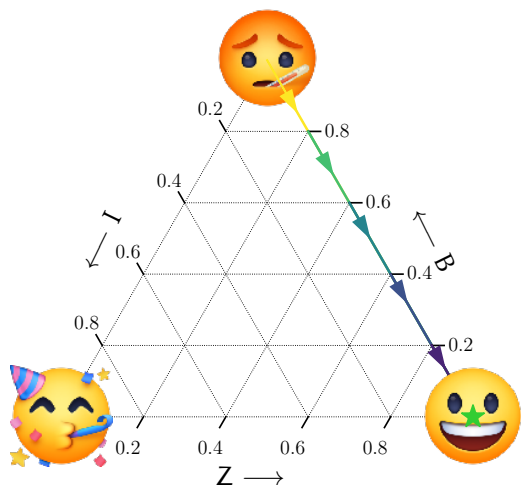
2.6.1 ZB

Po brezdimezionalizaciji model ZB ne vsebuje več nobenega parametra, saj je ta zajet v časovno skalo. Očitno je torej, da imamo dve fiksni točki: povsem zdravo in povsem bolno populacijo. Povsem bolna populacija je stabilna točka, kot vidimo na sliki 3

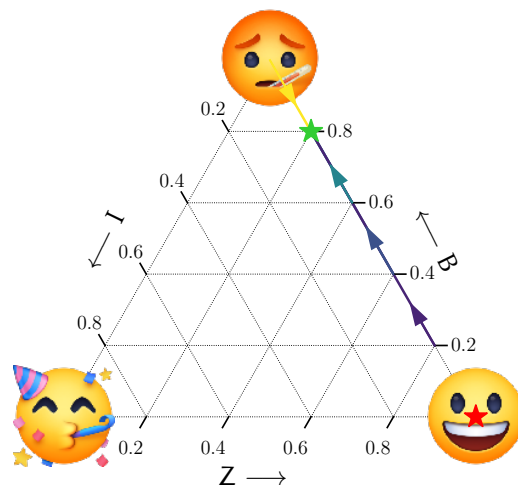


Slika 3: Fazni diagram modela ZB

2.6.2 ZBZ



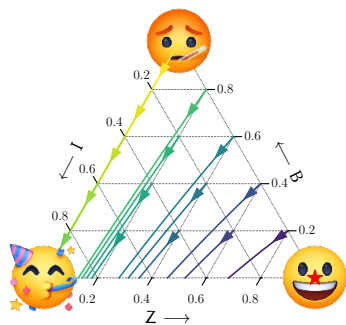
Slika 4: Fazni diagram modela ZBZ, $\xi = 0,5$.



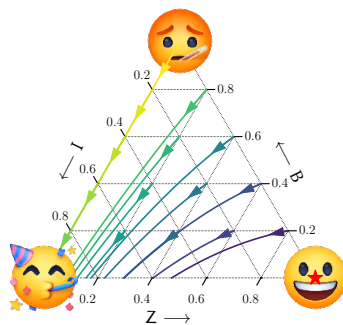
Slika 5: Fazni diagram modela ZBZ, $\xi = 5$.

Na slikah 4 in 5 sta prikazana fazna diagrama za model ZBZ. V splošnem imamo dve fiksni točki: $(0,0)$ in $(1/\xi, 1-1/\xi)$. Prva je stabilna, če $\xi < 1$, druga pa je – ko obstaja – venomer stabilna. Opazimo torej, da pri $\xi < 1$ celotna populacija ozdravi, medtem ko je pri $\xi \geq 1$ končno stanje mešanica zdrave in bolne populacije.

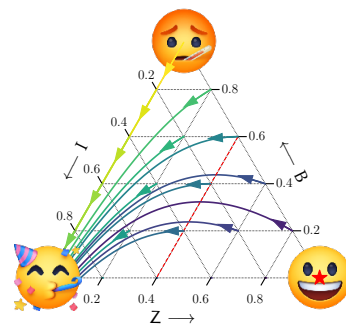
2.6.3 ZBI



Slika 6: Fazni diagram modela ZBI, $\xi = 0,5$.



Slika 7: Fazni diagram modela ZBI, $\xi = 1$.



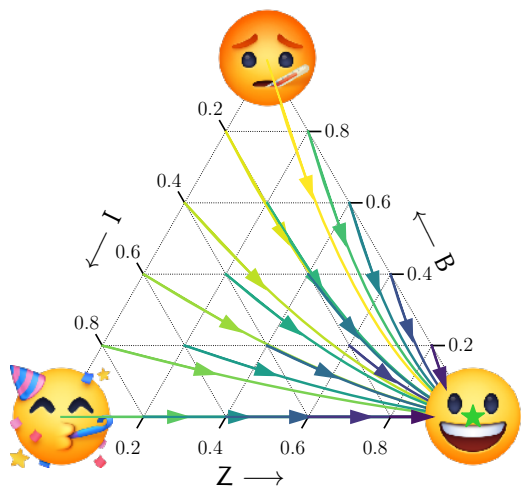
Slika 8: Fazni diagram modela ZBI, $\xi = 2,5$.

Model ZBI ponuja eno stacionarno stanje, in sicer $(\alpha, 0, 1 - \alpha)$, torej tako, pri kateri ni obolelih posameznikov. Na slikah 6–8 so prikazani fazni diagrami. Če želimo ugotoviti, ali bo število obolelih imelo maksimum, ovrednotimo pogoj

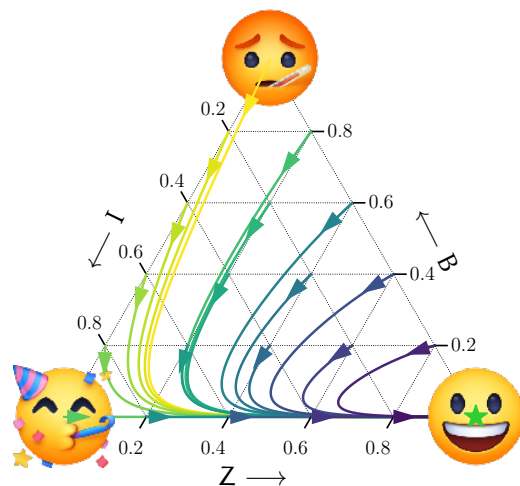
$$\dot{B} > 0 \implies Z > 1/\xi$$

Začetni delež zdravih mora torej biti manjši od $1/\xi$, da ne bo prišlo do povečevanja obolelih. Na diagramih je z rdečo črtkano črto prikazano stanje, ko je v populaciji maksimalni delež obolelih.

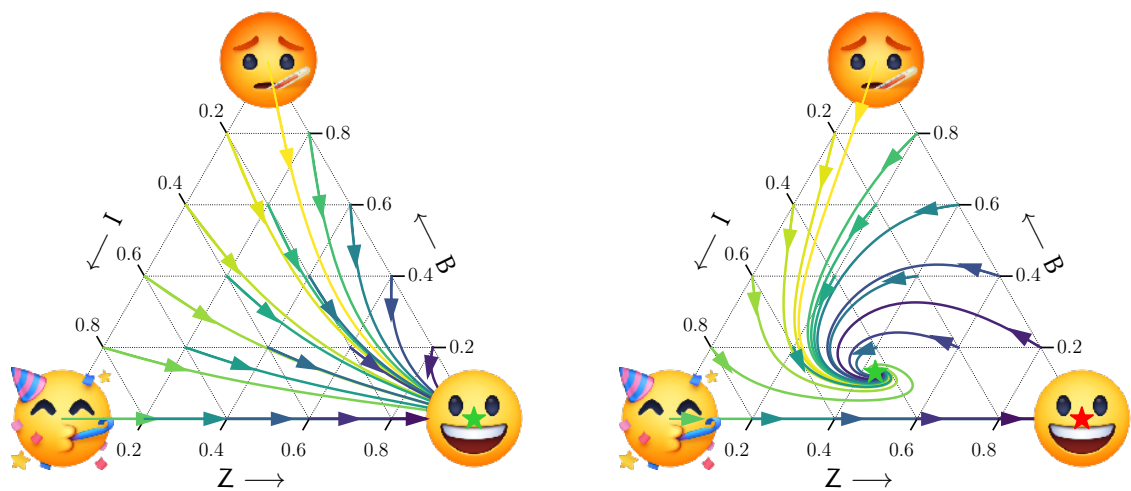
2.6.4 ZBI z rojstvi in smrti



Slika 9: Fazni diagram modela ZBI, $\xi = 0,5, \mu = 3$.



Slika 10: Fazni diagram modela ZBI, $\xi = 1, \mu = 0,1$.



Slika 11: Fazni diagram modela ZBI, $\xi = 2, \mu = 2$. Slika 12: Fazni diagram modela ZBI, $\xi = 3, \mu = 0,3$.

Model ZBI z vključeno demografsko dinamiko ponuja bogatejša nabore faznih diagramov, prikazane na slikah 9–12. V splošnem dobimo dve fiksni točki, in sicer kot običajno povsem zdravo populacijo $(1, 0, 0)$, poleg tega pa še stabilno točko $\left(\frac{1+\mu}{\xi}, \mu \left(\frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{\xi} \right), \left(\frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{\xi} \right) \right)$.

3 Model plenilca in plena

Model sestavimo postopoma. Začnemo s preprosto eksponentno rastjo populacije zajcev, ki rastejo s specifično hitrostjo rasti r in eksponentno umirajočo populacijo lisic s specifično hitrostjo umrljivosti m :

$$\dot{Z} = rZ \quad \dot{L} = -mL$$

Dodamo še interakcijska člena, pri čemer h označuje verjetnost, da ob interakciji obeh živali lisica poje zajca in η energijsko učinkovitost pretvorbe zajca v lisico:

$$\dot{Z} = rZ - hZL \quad \dot{L} = -mL + \eta hZL$$

Konstante preimenujemo in združimo:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \alpha Z - \beta ZL \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL \end{aligned}$$

Prevedemo še v enoparametrično ($p = \sqrt{\alpha/\gamma}$) brezdimenzijsko obliko:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Z}} &= p\mathcal{Z}(1 - \mathcal{L}) \\ \dot{\mathcal{L}} &= \frac{\mathcal{L}}{p}(\mathcal{Z} - 1) \end{aligned}$$

Parameter p je torej sorazmeren s korenom razmerja hitrosti rasti zajcev in hitrosti umrljivosti lisic.

3.1 Značilnosti

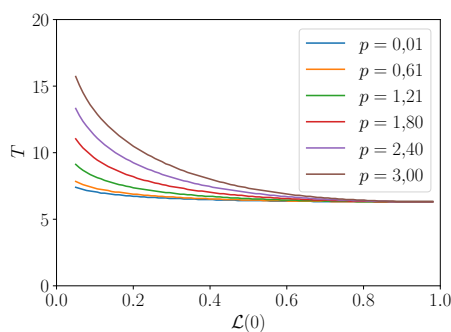
Izračunamo lahko Jacobian:

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} p\mathcal{Z}(1 - \mathcal{L}) \\ (\mathcal{L}/p)(\mathcal{Z} - 1) \end{pmatrix}$$

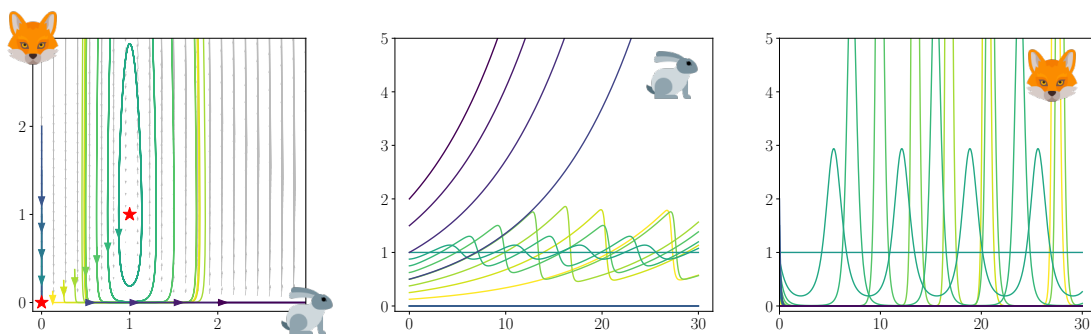
Dobimo dve fiksni točki, in sicer $(0, 0)$ in $(1, 1)$.

Na slikah 14–16 so prikazani fazni diagrami za različne vrednosti parametra p . Opazimo lahko povsem periodično strukturo, pri čemer lisice zamujajo za zajci. Če na začetku ni prisotnih zajcev $(0, \mathcal{L}_0)$, bodo lisice samo eksponentno umirale; če ni prisotnih lisic $(\mathcal{Z}_0, 0)$, se bodo zajci eksponentno razmnoževali. Parameter p kvalitativno podaja razmerje med amplitudi nihanja števila zajcev in števila lisic.

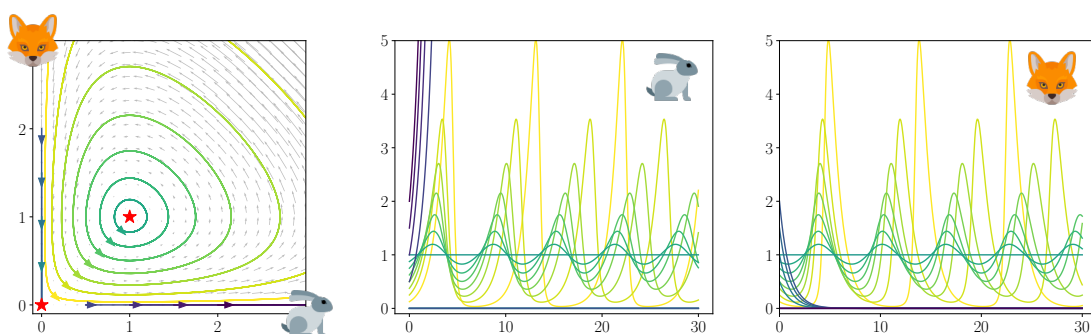
Na sliki 13 so prikazani obhodni časi orbite pri različnih vrednostih parametra p in začetnih vrednostih $(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) = (1, \mathcal{L}(0))$. Opazimo, da postane blizu fiksne točke $(1, 1)$ perioda neodvisna od parametra p in začetnih pogojev. Res: pokazali smo, da lahko v okolici točke $(1, 1)$ zapišemo sistem kot harmonično nihanje s periodo 2π .



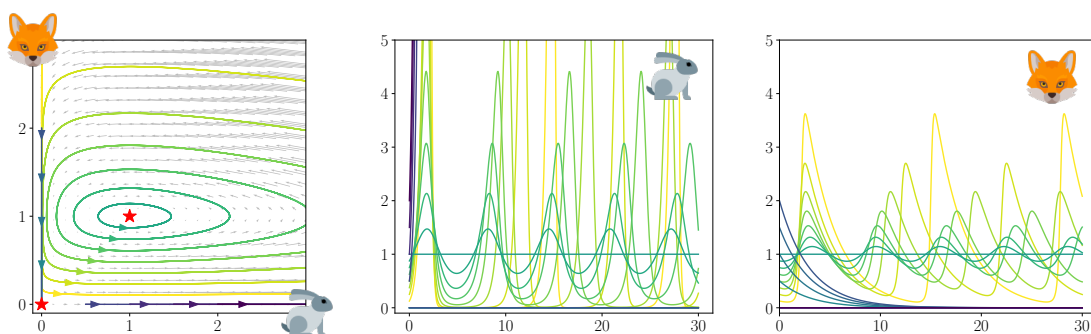
Slika 13: Obhodni časi v okolici fiksne točke $(1, 1)$.



Slika 14: Model Lotke-Volterre, $p = 0,1$.



Slika 15: Model Lotke-Volterre, $p = 1$.



Slika 16: Model Lotke-Volterre, $p = 3$.

3.2 Logistična rast zajcev

Model lahko sedaj smiselno nadgradimo tako, da pri zajcih upoštevamo logistično rast in dodamo novi parameter, ki predstavlja nosilnost okolja za zajce:

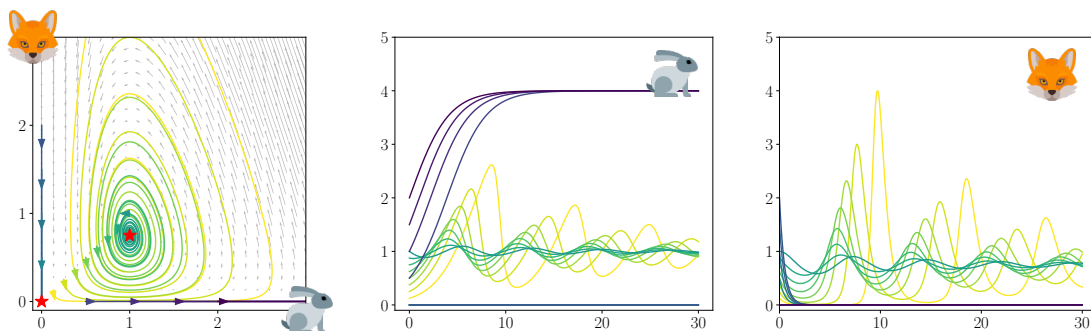
$$\dot{Z} = \alpha Z \left(1 - \frac{Z}{K}\right)$$

Po uvedbi brezdimenzijskih spremenljivk dobimo enačbi:

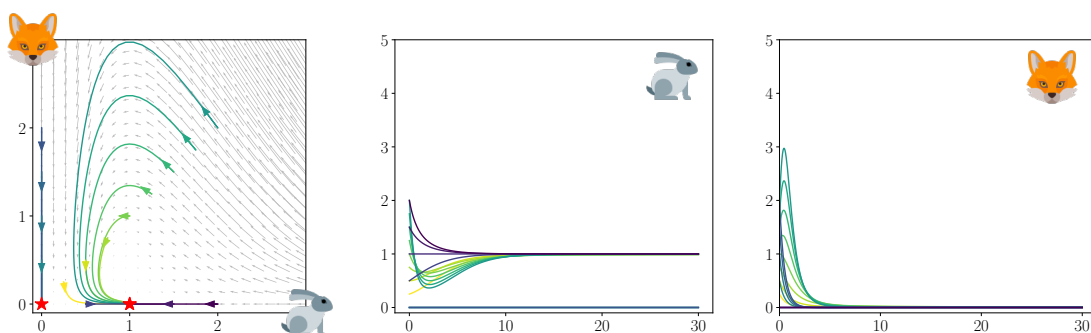
$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{Z}} &= p\mathcal{Z}(1 - \mathcal{L}) - pq\mathcal{Z}^2 \\ \dot{\mathcal{L}} &= \frac{\mathcal{L}}{p}(\mathcal{Z} - 1)\end{aligned}$$

pri čemer je nov parameter $q = \frac{\gamma}{\delta K} \propto \frac{1}{K}$ povezan z nosilnostjo okolja. Pri $q \rightarrow 0$ se model prevede nazaj na eksponentno rast (neskončna nosilnost okolja), pri $q \rightarrow \infty$ pa postane rast zajcev nemogoča (ničelna nosilnost okolja).

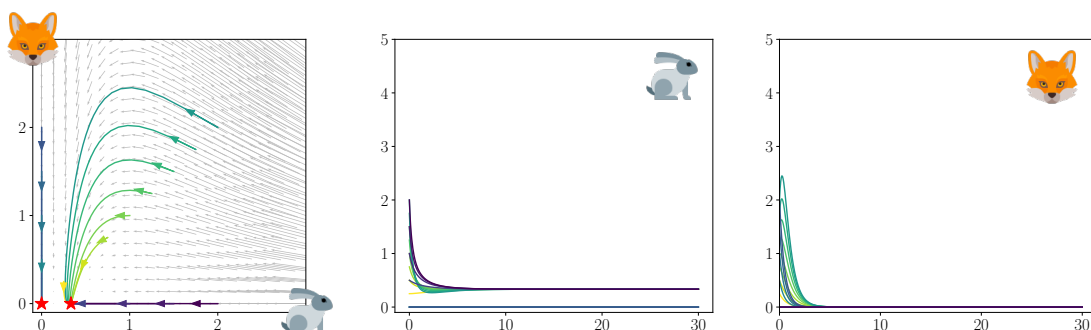
Na slikah 17–19 so prikazani fazni diagrami in časovni poteki za model z logistično rastjo zajcev. Opazimo lahko drugačno obnašanje, in sicer okolica točke $(1, 1)$ ne predstavlja več periodičnih orbit, temveč točka postane privlačna. Prav tako opazimo ključno značilnost, in sicer je pri vrednostih $q < 1$ nosilnost okolja za zajce premajhna, da bi bila sposobna vzdrževati tudi populacijo lisic.



Slika 17: Model Lotke-Volterre z logistično rastjo zajcev, $p = 0,5$, $q = 0,25$



Slika 18: Model Lotke-Volterre z logistično rastjo zajcev, $p = 0,5$, $q = 1$



Slika 19: Model Lotke-Volterre z logistično rastjo zajcev, $p = 0,5$, $q = 3$

4 Model laserja

Model laserja podamo s populacijo vzbujenih atomov in fotonov, pri čemer upoštevamo tudi izgube fotonov, spontano sevanje in optično črpanje.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= B_1 a f - \alpha f \\ \dot{a} &= -B_2 a f - \beta a + R\end{aligned}$$

Zaradi poenostavitve izenačimo oba Einsteinova koeficienta $B_1 = B_2 = B$ in brezdimenzijske spremenljivke $\mathcal{A} = \frac{B}{\alpha} a$, $\mathcal{F} = \frac{B}{\beta} f$, $\tau = t\sqrt{\alpha\beta}$, $p = \sqrt{\beta/\alpha}$, $r = \frac{BR}{\sqrt{\alpha^3\beta}}$. Pridelamo dve diferencialni enačbi

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{A}} &= r - p\mathcal{A}(\mathcal{F} + 1) \\ \dot{\mathcal{F}} &= \frac{\mathcal{F}}{p}(\mathcal{A} - 1)\end{aligned}$$

in pripadajoči Jacobian:

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} -p(\mathcal{F} + 1) & -p\mathcal{A} \\ \mathcal{F}/p & (\mathcal{A} - 1)/p \end{pmatrix}$$

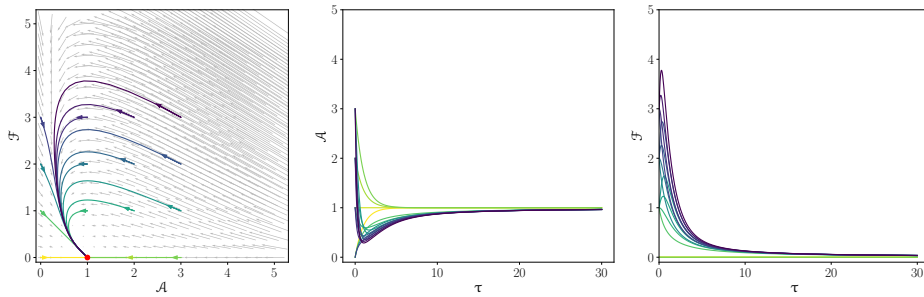
Izračun fiksni točk nam da rešitvi $(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = (r/p, 0)$ in $(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = (1, r/p - 1)$. Diagonalizacija Jacobiana v njih pa:

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} -p & -r \\ 0 & \frac{r-p}{p^2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & \frac{r-p}{p^2} \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = -p, \lambda_2 = \frac{r-p}{p^2}$$

Zaradi pozitivnosti parametrov modela je $\lambda_1 < 0$. V odvisnosti od λ_2 lahko dobimo različne oblike fiksni točk. Sicer je ta točka nezanimiva, ker v tej točki ni fotonov, ki jih želimo. V okolici druge fiksne točke je Jacobian:

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} -r & -p \\ \frac{r-p}{p^2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & \frac{r-p}{p^2} \end{pmatrix} \implies \lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{p(r^2 + 4)} - 4r}{2\sqrt{p}} - \frac{r}{2}$$

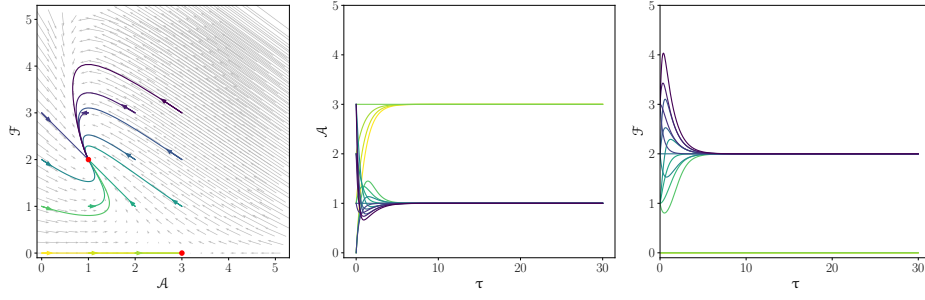
Za obstoj fiksne točke mora veljati $r > p$.



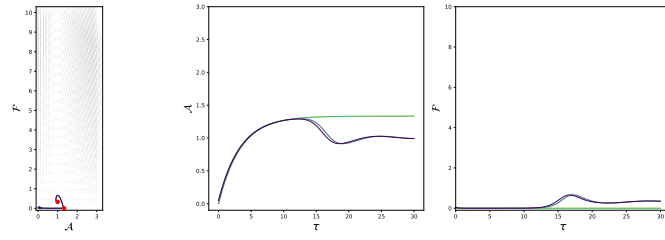
Slika 20: Fazni diagram modela laserja, $r = 1, p = 1$.

4.1 Laserske oscilacije

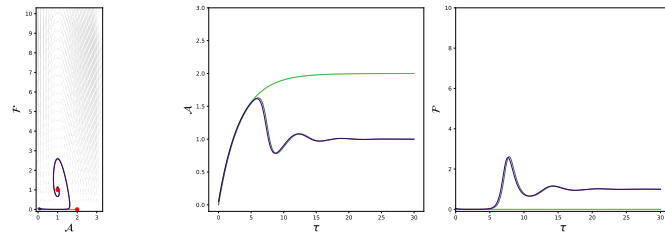
Pri nizkih začetnih vrednostih $(\mathcal{A}(0), \mathcal{F}(0) \ll 1)$ lahko opazimo laserske oscilacije. Amplituda narašča z r in pada s p , torej je verjetno sorazmerna s kvocientom r/p .



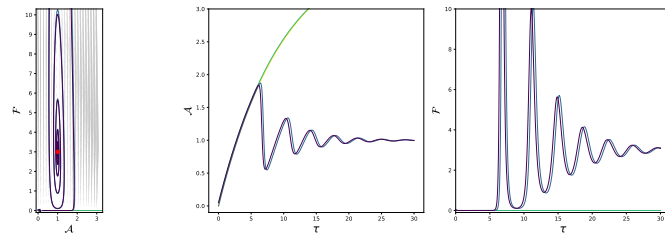
Slika 21: Fazni diagram modela laserja, $r = 3, p = 1$.



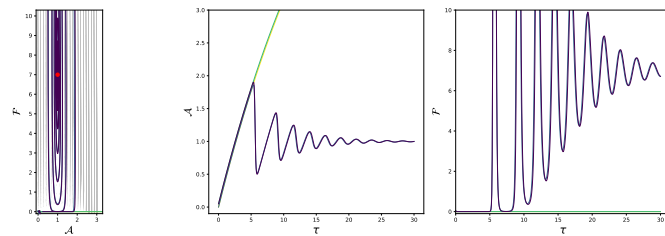
Slika 22: Fazni diagram modela laserja, $r = 0,4, p = 0,3$.



Slika 23: Fazni diagram modela laserja, $r = 0,5, p = 0,3$.



Slika 24: Fazni diagram modela laserja, $r = 0,4, p = 0,1$.



Slika 25: Fazni diagram modela laserja, $r = 0,4, p = 0,05$.

5 Literatura

Pastor, J. Mathematical Ecology of Populations and Ecosystems. 2008.
<https://institutefordiseasemodeling.github.io/Documentation/general/model-compartments.html>